Aritmética
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Intelectum
EVOLUCIÓN

Intelectum
Aritmética

IA

Indicadores de logro

Unidad 1

- Discrimina entre proposiciones simples y compuestas.
- Evalúa y aplica las distintas leyes proposicionales.
- Utiliza tablas de verdad para resolver proposiciones lógicas.
- Utiliza la simbología para determinar inclusión y pertenencia.
- Comprende la clasificación de conjuntos (conjunto finito, infinito, vacío, unitario, universal y potencia).
- Resuelve problemas utilizando las leyes del álgebra de conjuntos y además los representa gráficamente.
- Reconoce numerales escritos en diferentes sistemas de numeración y sus principios.
- Representa numerales en distintas bases utilizando algoritmos.
- Identifica las cuatro operaciones básicas en el conjunto de los números enteros positivos.
- Emplea las propiedades de números enteros aplicables en otros sistemas de numeración.

Unidad 2

- Define y evalúa el concepto de divisibilidad y multiplicidad.
- Demuestra los criterios de la divisibilidad haciendo uso de las propiedades del principio de multiplicidad.
- Identifica números primos y compuestos realizando la descomposición canónica.
- Analiza el algoritmo para calcular el MCD y el MCM.
- Determina números primos entre sí y utiliza el teorema fundamental de la aritmética.
- Evalúa la aplicación de razones y proporciones en la resolución enunciados.
- Aplica la definición de razón y proporción al relacionar o comparar distintas cantidades numéricas.
- Discrimina las distintas propiedades de los números racionales en las fracciones propias e impropias.
- Calcula operaciones basadas en la utilización de números racionales.

LÓGICO... CASO RESUELTO

El detective Facetwit está a punto de resolver el caso del robo de una pintura de un importante museo de arte, para lo cual cuenta con las siguientes pistas:

- *O el robo se cometió de noche en la más absoluta oscuridad o el principal sospechoso es un ciego.*
- *Pero, o el principal sospechoso no es ciego o miente al aclarar que no vio nada.*
- *Pero, miente o el detector de mentiras está estropeado.*
- *El caso es que el detector no puede estar estropeado jamás (es infalible).*

¿Miente o no miente el sospechoso?, ¿es ciego o no lo es?, ¿el robo se cometió de día o de noche?

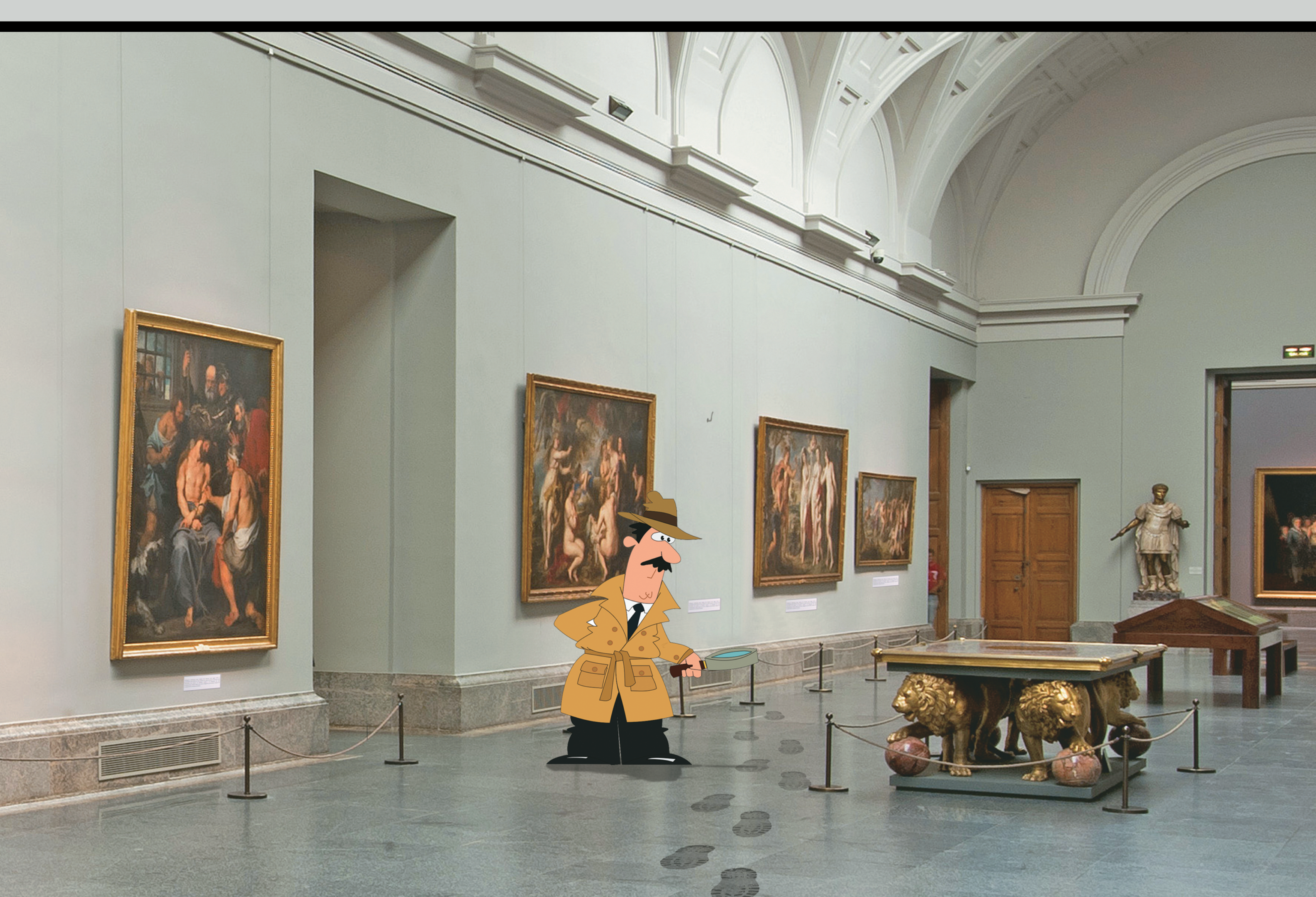
Contenido:

Unidad 3

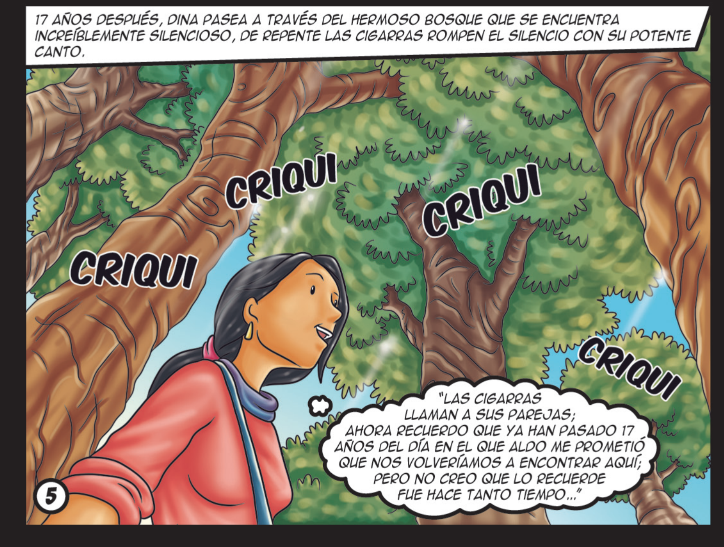
- Discrimina entre magnitudes inversamente y directamente proporcionales y evalúa sus propiedades.
- Evalúa el reparto proporcional simple y compuesto.
- Aplica la definición de reparto proporcional simple y compuesto en enunciados.
- Identifica la aplicación de regla de tres inversa y directa.
- Aplica la definición de regla de tres simple directa, inversa y compuesta.
- Evalúa los casos de aumento y descuentos sucesivos.
- Analiza los datos disponibles en la aplicación de aumentos y descuentos sucesivos.
- Analiza la clasificación de una mezcla (directa e inversa).
- Utiliza la definición de mezcla identificando los casos entre mezcla directa e inversa.
- Identifica el interés simple del compuesto.
- Aplica las clases de interés simple y compuesto en la resolución de problemas comerciales.

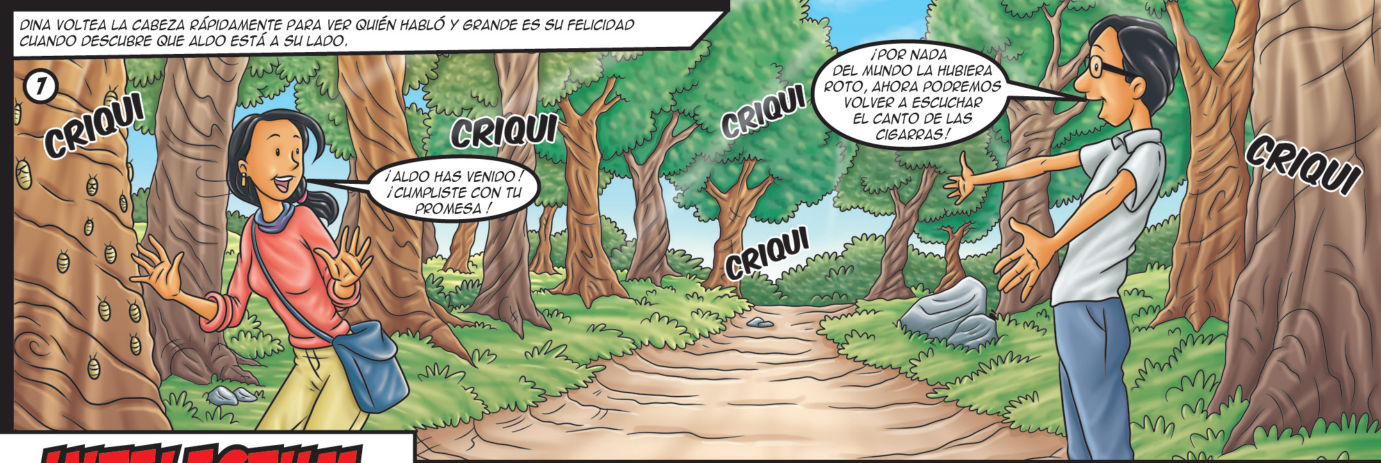
Unidad 4

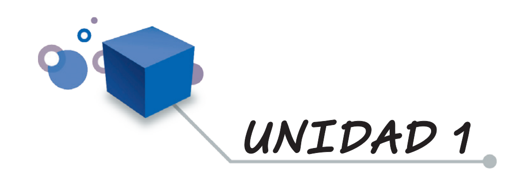
- Comprende la definición de letra de cambio e identifica los elementos de la regla de descuento.
- Determina el descuento racional o comercial y valor actual de cantidades dadas al aplicarle descuentos.
- Analiza conjunto de datos utilizando cuadros estadísticos.
- Identifica los distintos elementos de una tabla de distribución y determina las distintas medidas de tendencia central.
- Analiza las técnicas de conteo (diagrama de árbol), el principio de multiplicación y el de adición.
- Aplica las técnicas de conteo de datos y utiliza la definición de permutación y combinación en distintos casos.
- Identifica los diferentes espacios muestrales en el cálculo de las probabilidades.
- Efectúa problemas sobre probabilidades utilizando los principios de adición y multiplicación.



EN LA SELVA ALTA DEL PERÚ...







UNIDAD 1

LÓGICA PROPOSICIONAL

PROPOSICIÓN LÓGICA

Es aquel enunciado en el que se afirma algo y se le puede asignar solamente uno de los valores de verdad (verdadero o falso).

Nota

A la veracidad o falsedad de una proposición se le denomina valor de verdad.

Notación

Las proposiciones lógicas se denotan con las letras minúsculas del alfabeto: p, q, r, s, t, etc. A estas se les denomina variables proposicionales.

CLASES DE PROPOSICIONES LÓGICAS

a) **Proposiciones simples o atómicas.** Son aquellas que están compuestas de una sola proposición, además, carecen de conjunciones gramaticales y del adverbio de negación **no.**
Ejemplos:
- Voy a estudiar aritmética.
- Luis esta jugando fútbol.

Nota

Para representar varias proposiciones, se utilizan los subíndices p_1, p_2, p_3, ...

b) **Proposiciones compuestas o moleculares.** Son aquellas que están compuestas de dos o más proposiciones, relacionadas entre sí por conjunciones gramaticales o afectadas por el adverbio de negación **no.**
Ejemplos:
- Eder es matemático y Jhonatan es físico.
- Pedro no va al cine.

Nota

Las conjunciones gramaticales son palabras que enlazan proposiciones, sintagmas o palabras.

CONECTIVOS LÓGICOS

Llamados también operadores. Son símbolos que reemplazan a las conjunciones gramaticales y al adverbio de negación **no.**
Los conectivos lógicos que más usaremos son los siguientes:

EN LENGUAJE COMÚN	SÍMBOLO	NOMBRE DE LA PROPOSICIÓN
No es cierto que...	$\sim$	Negación
...y...	$\wedge$	Conjunción
...o...	$\vee$	Disyunción
Si... entonces...	$\Rightarrow$	Condicional
...si y solo si...	$\Leftrightarrow$	Bicondicional

Observación

Una tabla de verdad, es un diagrama que permite expresar todos los posibles valores de verdad de una proposición compuesta, para cada combinación de valores de verdad que se pueda asignar a sus proposiciones simples.

PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

La negación ($\sim$)

Dada una proposición p. Se denomina negación de p a la proposición denotada por $\sim$p, la cual niega a la proposición inicial, convirtiéndola en falsa cuando es verdadera y viceversa.
Su tabla de verdad es:

p	$\sim$p
V	F
F	V

$\sim$p: se lee: "no p" o "no es cierto que p".

Ejemplos:

- p: Andrea viajó a Cusco. V
- $\sim$p: Andrea no viajó a Cusco. F
- q: el conejo es un mamífero. V
- $\sim$q: no es cierto que el conejo es un mamífero. F

La conjunción ($\wedge$)

Es la proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **y.** Se denota: $p \wedge q$ (se lee: p y q).

Recuerda

Una proposición conjuntiva será verdadera, si sus proposiciones componentes (p y q) son verdaderas. En otros casos, será falsa.

Su tabla de verdad es:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplo:
Edgar juega (p) y (∧) Juan estudia. (q)

La Disyunción (∨)

Es la proposición compuesta por las proposiciones p y q, relacionadas mediante el conectivo lógico **o**. Se denota p ∨ q (se lee: p o q).

Su tabla de verdad es:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:
Pablo trabajará (p) o (∨) jugará. (q)

La condicional (⇒)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples p y q se relacionan mediante el conectivo lógico **si... entonces...** . Se denota p ⇒ q (se lee: si p, entonces q).

Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Donde:
p: antecedente
q: consecuente

Ejemplo:
Sonia estudia, (p) entonces (⇒) triunfará. (q)

La bicondicional (⇔)

Es aquella proposición en la que dos proposiciones simples p y q se relacionan mediante el conectivo lógico **si y solo si**. Se denota p ⇔ q (se lee: p si solo si q).

Su tabla de verdad es:

p	q	p ⇔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplo:
Álex jugará (p) si y solo si, (⇔) hizo sus deberes. (q)

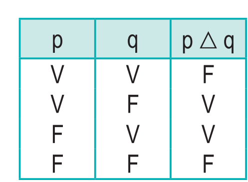
Nota

- Una proposición disyuntiva será falsa, si sus proposiciones componentes (p y q) son falsas. En otros casos, será verdadera.
- La proposición condicional es falsa únicamente cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente falso.
- La proposición bicondicional será verdadera en los casos en que las proposiciones que la conforman tengan el mismo valor de verdad.

La disyunción exclusiva (△)

Es aquella proposición en la que se relacionan dos proposiciones simples p y q mediante el conectivo **o... o...** Se denota p △ q (se lee: o p o q).

Su tabla de verdad es:



p	q	p △ q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo:
O juego fútbol (p) o juego básquet. (q)
Luego sería: p △ q

Recuerda

Una proposición disyuntiva exclusiva es verdadera si las proposiciones que la conforman tienen valores de verdad diferentes.

ESQUEMAS MOLECULARES

Es la interacción de proposiciones, conectivos lógicos y signos de agrupación en base a los cuales se va a determinar el valor de verdad del conectivo principal.

Clasificación

Tautología. Cuando los valores de la matriz principal son todos verdaderos.
Contradicción. Cuando los valores de la matriz principal son todos falsos.
Consistencia. Cuando en la matriz hay por lo menos una verdad y una falsedad.
Ejemplo:
Evalúa los siguientes esquemas moleculares e indica si es tautológico, contradictorio o consistente.

a) (∼p ⇒ q) ∨ ∼(p ∧ q)   b) ∼(∼p ∧ q) △ (∼q ∨ p)   c) ∼q ∧ ∼(p ∧ q)

Resolución:

a)

p	q	~p	⇒	q	∨	~	(p	∧	q)
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F

→ Tautología

∴ Es un esquema tautológico.

b)

p	q	~	(~p	∧	q)	△	(~q	∨	p)
V	V	V	F	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V	V

→ Contradicción

∴ Es un esquema contradictorio.

c)

p	q	~q	∧	~	(p	∧	q)
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	F

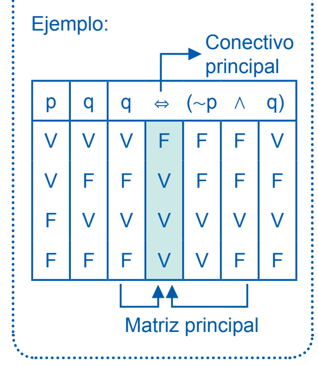
→ Consistencia

∴ Es un esquema consistente.

Nota

En un esquema molecular, el conectivo principal es el operador de mayor jerarquía que se encuentra libre de signos de colección.
También denominamos matriz principal de una tabla de verdad, a la columna que contiene los valores de verdad correspondientes al conectivo principal.

Ejemplo:



p	q	q	⇔	(~p	∧	q)
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Implicación lógica

Se llama así a la proposición condicional cuando es tautológica.

Equivalencia lógica

Se llama así a la proposición bicondicional cuando es tautológica.

Ejemplos:

p	q	(p	∧	q)	⇒	(~q	∨	q)
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	F	V	V	V	F

∴ (p ∧ q) ⇒ (~q ∨ q) es una implicancia lógica.

p	q	(p	⇒	q)	⇔	(~p	∨	q)
V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	F

∴ (p ⇒ q) ⇔ (~p ∨ q) es una equivalencia lógica.

Atención

Para evaluar una tabla de verdad de 2 variables proposicionales se necesitan 4 valores de verdad y para evaluar una tabla de verdad de 3 variables proposicionales se necesitan 8 valores de verdad.
En general, el número de valores de verdad que se asigna a cada variable resulta de aplicar la fórmula 2^n, donde n es el número de variables proposicionales que hay en el esquema molecular.

LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. **Idempotencia**
   p ∨ p ≡ p
   p ∧ p ≡ p

2. **Conmutativa**
   p ∨ q ≡ q ∨ p
   p ∧ q ≡ q ∧ p

3. **Asociativa**
   (p ∨ q) ∨ r ≡ p ∨ (q ∨ r)
   (p ∧ q) ∧ r ≡ p ∧ (q ∧ r)

4. **Distributiva**
   p ∨ (q ∧ r) ≡ (p ∨ q) ∧ (p ∨ r)
   p ∧ (q ∨ r) ≡ (p ∧ q) ∨ (p ∧ r)

5. **Absorción**
   p ∨ (p ∧ q) ≡ p
   p ∧ (p ∨ q) ≡ p
   p ∨ (~p ∧ q) ≡ p ∧ q
   p ∧ (~p ∨ q) ≡ p ∨ q

6. **De morgan**
   ~(p ∨ q) ≡ ~p ∧ ~q
   ~(p ∧ q) ≡ ~p ∨ ~q

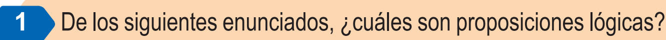
7. **Del complemento**
   ~(~p) ≡ p
   p ∨ ~p ≡ V
   p ∧ ~p ≡ F

8. **De la identidad**
   p ∨ V ≡ V
   p ∧ V ≡ p
   p ∨ F ≡ v
   p ∧ F ≡ F

9. **De la condicional**
   p ⇒ q ≡ ~p ∨ q

10. **De la bicondicional**
   p ⇔ q ≡ (p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)

Problemas resueltos



1 De los siguientes enunciados, ¿cuáles son proposiciones lógicas?

I. 91 es un número primo.
II. ¿A dónde vas?
III. El auto nuevo.
IV. Llámame.
V. Carlos aprueba el curso de Física.

Resolución:

Los enunciados I y V son proposiciones, ya que se les puede asignar un valor de verdad.

Los enunciados II, III y IV no son proposiciones, ya que no se les puede asignar un valor de verdad.

2 Dadas las siguientes proposiciones compuestas:

I. $\sqrt{\pi} > 3$ y $\sqrt{\sqrt[3]{64}} \geq \sqrt[3]{64}$
II. $-4^2 = (-4)^2$ sí y solo si $\sqrt{19} \notin \mathbb{Z}$
III. Si $(\sqrt{2} - 1)^2 < 0$ entonces $(-9)^2 = 81$

Indica el valor de verdad de cada una de ellas.

Resolución:

Representamos simbólicamente los enunciados y le asignamos el valor de verdad:

I. p: $\sqrt{\pi} > 3$; p = F
$\sqrt{\pi} = \sqrt{3,14} = 1,77 > 3$ (falso)
q: $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt{4} = 2 \geq \sqrt[3]{64} = 4$, q = F (falso)

Entonces: $p \wedge q$
$$\underbrace{F \wedge F}_{F}$$

II. p: $-4^2 = (-4)^2$; p = F q: $\sqrt{19} \notin \mathbb{Z}$; q = V
$-16 = 16$ (falso) $4,33 \notin \mathbb{Z}$ (verdadero)

Entonces: $p \Leftrightarrow q$
$$\underbrace{F \Leftrightarrow V}_{F}$$

III. p: $(\sqrt{2} - 1)^2 < 0$; p = F q : $(-9)^2 = 81$; q = V
$(0,41)^2 < 0$ $81 = 81$ (verdadero)
$0,16 < 0$ (falso)

Entonces: $p \Rightarrow q$
$$\underbrace{F \Rightarrow V}_{V}$$

3 Dados los siguientes esquemas tautológicos:

$\sim[(p \vee q) \Rightarrow r]$
$[r \Rightarrow (t \wedge \sim t)] \triangle (q \vee \sim s)$

Determina el valor de verdad de:

I. $p \triangle [(s \vee t) \wedge (s \vee \sim t)]$
II. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge s$
III. $(r \vee p) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

Resolución:

En el primer esquema tautológico:

$$\overbrace{\sim\underbrace{[(p \vee q) \Rightarrow r]}_{F}}^{V}$$

Para que $[(p \vee q) \Rightarrow r]$ sea falso, se debe cumplir:
r = F
$p \vee q \equiv V$ ...(1)

En el segundo esquema tautológico:
$[r \Rightarrow \underbrace{(t \wedge \sim t)}]\triangle (q \vee \sim s)$
$[F \Rightarrow F] \triangle (q \vee \sim s)$
$V \triangle (q \vee \sim s)$

Entonces, para que el esquema sea tautológico, se debe cumplir:
$q \vee \sim s \equiv F$
↓ ↓
F F (s = V)

En (1):
$p \vee q \equiv V$
↓ ↓
V F

Luego: p = V; q = F; r = F; s = V

Determinamos el valor de verdad de:

I. $p \triangle [(s \vee t) \wedge (s \vee \sim t)]$
$p \triangle [s \vee (t \wedge \sim t)]$
$p \triangle [s \vee F]$
$p \triangle s$
$V \triangle V \equiv F$

II. $(p \Rightarrow \sim q) \wedge s$
$(V \Rightarrow V) \wedge V$
$V \wedge V$
V

III. $(r \vee p) \Leftrightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$
$(F \vee V) \Leftrightarrow (V \Rightarrow V)$
$V \Leftrightarrow V$
V

4 Si el esquema molecular:

$$\{[s \triangle (\sim q \wedge r)] \wedge [\sim s \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)]\} \Rightarrow \sim s$$

es contradictorio, determina los valores de verdad de p, q, r y s; en ese orden.

Resolución:

Del enunciado, el esquema molecular es contradictorio:

$$\overbrace{\underbrace{\{[s \triangle (\sim q \wedge r)] \wedge [\sim s \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)]\}}_{V} \Rightarrow \underbrace{\sim s}_{F}}^{F} \quad (s = V)$$

Entonces, se debe cumplir:

$$\{\underbrace{[s \triangle (\sim q \wedge r)]}_{V} \wedge \underbrace{[\sim s \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow q)]}_{V}\}$$

Tomando en cuenta que s = V, se tiene:

$$\{[V \triangle \underbrace{(\sim q \wedge r)}_{F}] \wedge [F \Leftrightarrow \underbrace{(\sim p \Rightarrow q)}_{F}]\}$$

Luego:
$\sim p \Rightarrow q = F$; de donde p = F.
↓ ↓
V F

Además:

$\sim q \wedge r \equiv F$

$\ \downarrow \quad \downarrow$

$\ V \quad F$

Por lo tanto: $p = F$; $q = F$; $r = F$; $s = V$

5 Se define el operador lógico σ mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	p σ q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	F

Evalúa el siguiente esquema molecular:

$[(\sim p\ \sigma\ q)\ \sigma\ (p \bigtriangleup q)]\ \sigma \sim q$

Da como respuesta los valores de verdad de la matriz principal.

Resolución:

Elaboramos la tabla de verdad:

p	q	[(~p	σ	q)	σ	(p	△	q)]	σ	~q
V	V	F	F	V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	V	F	F	F	F	V

6 Sean las proposiciones simples:

p : Huancayo es la capital del departamento de Junín.

q : $(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 23° + 19°$

r : $\sqrt{7 + \sqrt{81}} \notin \mathbb{N}$

Determina el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

I. $(p \bigtriangleup \sim q) \wedge (\sim r \Leftrightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)$

II. $[\sim(p \bigtriangleup \sim r) \Leftrightarrow \sim q] \wedge [\sim p \wedge (r \Rightarrow q)]$

III. $[p \bigtriangleup (q \Rightarrow \sim p)] \Leftrightarrow (\sim r \vee q)$

Resolución:

Determinamos el valor de verdad de cada proposición simple:

- Sabemos que Huancayo es la capital del departamento de Junín, entonces: $p = V$
- Resolvemos:

$(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = 23° + 19°$

$(\sqrt{3})^2 - 1 = 1 + 1$

$3 - 1 = 1 + 1$

$2 = 2$

Entonces: $q = V$

- Tenemos:

$\sqrt{7 + \sqrt{81}} = \sqrt{7 + 9} = \sqrt{16} = 4 \in \mathbb{N}$

Entonces: $r = F$

Luego:

I. $(p \bigtriangleup \sim q) \wedge (\sim r \Leftrightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow r)$

$(V \bigtriangleup F) \wedge (V \Leftrightarrow V) \wedge (F \Rightarrow F)$

$V \quad \wedge \quad V \quad \wedge \quad V \equiv V$

II. $[\sim(p \bigtriangleup \sim r) \Leftrightarrow \sim q] \wedge [\sim p \wedge (r \Rightarrow q)]$

$[\sim(V \bigtriangleup V) \Leftrightarrow F] \wedge [F \wedge (F \Rightarrow V)]$

$[\sim(F) \Leftrightarrow F] \wedge [F \wedge V]$

$[V \Leftrightarrow F] \wedge F$

$F \wedge F \equiv F$

III. $[p \bigtriangleup (q \Rightarrow \sim p)] \Leftrightarrow (\sim r \vee q)$

$[V \bigtriangleup (V \Rightarrow F)] \Leftrightarrow (V \vee V)$

$[V \bigtriangleup F] \Leftrightarrow V$

$V \Leftrightarrow V \equiv V$

7 De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son equivalentes entre sí?

I. $\sim p \Rightarrow q$

II. $p \vee \sim[\sim q \vee (p \wedge \sim q)]$

III. $\sim q \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)]$

Resolución:

Se tiene:

I. $\sim p \Rightarrow q \equiv \sim(\sim p) \vee q \equiv p \vee q$

II. $p \vee \sim[\sim q \vee (p \wedge \sim q)] \equiv p \vee \sim[\sim q] \equiv p \vee q$

III. $\sim q \wedge [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)] \equiv \sim q \wedge [p \wedge (\sim q \vee q)]$

$\equiv \sim q \wedge [p \wedge V]$

$\equiv \sim q \wedge p$

Luego, (I) y (II) son equivalente entre sí.

8 Simplifica:

$\sim\{[(\sim p \wedge r) \vee (q \vee s) \vee \sim(p \vee r)] \wedge (p \Rightarrow q)\} \vee (\sim p \Rightarrow p)$

Resolución:

$H = \sim\{[(\sim p \wedge r) \vee (q \vee s) \vee \sim(p \vee r)] \wedge (p \Rightarrow q)\} \vee (\sim p \Rightarrow p)$

A : $\sim(p \vee r) \equiv \sim p \wedge \sim r$ (Ley de Morgan)

B : $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ (Ley del condicional)

C : $\sim p \Rightarrow p \equiv \underbrace{p \vee p}_{\text{Ley del condicional}} \equiv p$ ← Idempotencia

Reemplazando:

$H \equiv \sim\{[(\sim p \wedge r) \vee (q \vee s) \vee (\sim p \wedge \sim r)] \wedge (\sim p \vee q)\} \vee p$

$\equiv \sim\{[\underbrace{(\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim r)}_{D} \vee (q \vee s)] \wedge (\sim p \vee q)\} \vee p$

D : $(\sim p \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim r) \equiv \underbrace{\sim p \wedge (r \wedge \sim r)}_{\text{Ley asociativa}} \equiv \underbrace{\sim p \wedge V}_{\text{Ley del complemento}} \equiv \sim p$ ← Ley de la identidad

Luego:

$H \equiv \sim\{[(\sim p \vee q) \vee s] \wedge (\sim p \vee q)\} \wedge p \equiv \sim\underbrace{\{\sim p \vee q\}}_{\text{Ley de absorción}} \vee p$

$H \equiv (p \wedge \sim q) \vee p \equiv p$ (Ley de absorción)

TEORÍA DE CONJUNTOS

Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas: A; B; C...; mientras que los elementos del conjunto se representan mediante variables o letras minúsculas separadas por punto y coma.

NOCIÓN DE CONJUNTO

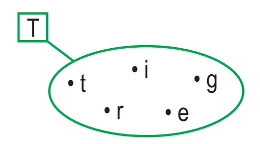
Es una colección o agrupación de objetos homogéneos o heterogéneos, los cuales pueden ser abstractos o concretos. Dichos objetos reciben el nombre de elementos del conjunto.

Ejemplo:
Las letras de la palabra tigre.

Notación:
T = {t; i; g; r; e}

Donde:
T: nombre del conjunto.
t; i; g; r; e: elementos del conjunto T.

Representación gráfica



Los elementos se representan dentro de una figura cerrada (diagrama de Venn-Euler).

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Es una relación que vincula cada elemento con el conjunto, nos indica si un elemento forma parte del conjunto considerado.

Notación:
$\in$ se lee: "... pertenece al conjunto..."
$\notin$ se lee: "... no pertenece al conjunto..."

Ejemplo:
$L = \left\{\frac{11}{3}; \frac{4}{5}; \frac{9}{7}; \frac{17}{19}; \frac{21}{23}\right\}$; de donde:

- $\frac{11}{3} \in L$
- $\frac{2}{3} \notin L$
- $\frac{16}{4} \notin L$
- $\frac{9}{7} \in L$
- $6 \notin L$
- $\frac{17}{19} \in L$

Nota

Sea el conjunto:
A = {x/x es una letra de la palabra matemática}
A = {m; a; t; e; i; c}
$\therefore$ n(A) = 6

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión

Cuando se enuncia uno a uno los elementos de un conjunto de manera explícita.

Ejemplo: R = {1; 3; 5; 7}

Por comprensión

Cuando se indica una característica particular y común a todos sus elementos.

Ejemplo: $R = \{2x + 1 / x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$

Atención

Una función proposicional en una variable x es una oración, en la que x figura como sujeto u objeto directo, que se convierte en proposición cuando se le asigna un valor especifico a x.

Notación: P(x)
Ejemplo:
P(x): x es impar
P(1) es verdadero
P(2) es falso

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Indica la cantidad de elementos diferentes de un conjunto dado.

Notación:
n(A) se lee: cardinal de A.

Ejemplo: $A = \{1; 2; 5; 6; 5\} \Rightarrow n(A) = 4$

CUANTIFICADORES

Cuantificador universal

Sea P(x) una función proposicional sobre el conjunto A, el cuantificador $\forall$ indica que todos los valores del conjunto A hacen que la función proposicional P(x) sea verdadera.
La expresión: "para todo $x \in A$, se verifica P(x)", se denota:

$\forall x \in A$: P(x)
$\forall$ se lee: para todo o para cualquier

Ejemplos:
$\forall x \in A: x + 1 < x$
$\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 \geq 0$

Cuantificador existencial

Sea P(x) una función proposicional sobre un conjunto A, el cuantificador ∃ indica que para algún valor del conjunto A, la función proposicional P(x) es verdadera.
La expresión: "existe al menos un x, tal que se verifica P(x)", se denota:

$\exists\, x \in A / P(x)$
∃ se lee: existe al menos

Ejemplos:
$\exists\, x \in \mathbb{Z} / x - 7 = 1$
$\exists\, x \in \mathbb{Z} / (x-3)(x-2) = 0$

Nota
El símbolo ∃! se lee: existe un único...

Negación de los cuantificadores

$\sim [\forall\, x \in A: P(x)] \equiv \exists\, x \in A / \sim P(x)$
$\sim [\exists\, x \in A / P(x)] \equiv \forall\, x \in A: \sim P(x)$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión

Se dice que el conjunto A está contenido en otro conjunto B, (A es un subconjunto de B), si y solo si, todo elemento de A es también un elemento de B.

Notación:

$A \subset B \Leftrightarrow \forall\, x \in A \Rightarrow x \in B$

$A \subset B$ se lee: "A está incluido en B" o "A es subconjunto de B"

Igualdad

Se dice que dos conjuntos son iguales, si estos tienen los mismos elementos.

Notación:

Sean los conjuntos A y B: $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando solamente uno de ellos está incluido en el otro, es decir, o bien $A \subset B$ o bien $B \subset A$.

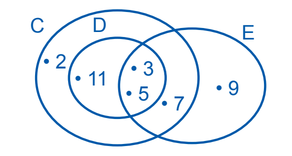
Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen algún elemento en común.

Nota

- Aplicación de inclusión
  Sean los conjuntos:
  C = {2; 3; 5; 7; 11}
  D = {3; 5; 11}
  E = {3; 5; 7; 9}

  Gráficamente:



  $D \subset C$: D está incluido en C.
  En cambio, $E \not\subset D$: E no está incluido en D.

- Aplicación de igualdad
  Sean los conjuntos:
  $A = \{3^k \in \mathbb{Z} / 1 \leq k < 5\}$
  B = {3; 9; 27; 81}
  $A \subset B \wedge B \subset A$
  $\therefore A = B$

- Aplicación de conjuntos disconjuntos
  $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 10\}$
  $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x > 22\}$
  $\therefore$ A y B son disjuntos.

CLASES DE CONJUNTOS

Conjunto finito

Es aquel conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos, por lo tanto el proceso de conteo de sus elementos termina en algún momento.

Ejemplo: $N = \{\pi; \sqrt{2}; \sqrt{3}; e\} \Rightarrow n_{(N)} = 4$

Conjunto infinito

Es aquel conjunto que posee una cantidad ilimitada de elementos, por lo tanto el proceso e conteo de sus elementos no termina.

Ejemplo: R = {x/x es un número natural impar}

Conjunto vacío o nulo

Es aquel que carece de elementos.

Notación: ∅ ; { }

Ejemplo: $A = \{x / 0 < x < 5 \wedge x^2 = 100\} = \{\ \} = \varnothing$

Conjunto unitario

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento. También llamado singleton.

Ejemplo: $P = \{x/x \in \mathbb{R};\ x \leq 0 \wedge x > 0\} = \{0\}$

Atención
El vacío es subconjunto de todo conjunto, es decir:
$\forall A: \varnothing \subset A$

Conjunto universal

Es el conjunto que contiene a todos los elementos considerados en un contexto determinado. No existe un conjunto universal absoluto y se le denota generalmente por U.

Ejemplo: $A = \{2x + 3 / x \in \mathbb{Z} \wedge 0 < x < 4\}$

Un conjunto universal para A sería: U = {1; 3; 5; 7; 9; 11}

Nota

- $\varnothing \neq \{\varnothing\}$
- $\varnothing \neq \{\{\ \}\}$

Conjunto potencia

El conjunto potencia de A, es aquel que está formado por todos lo subconjuntos posibles que posee el conjunto A, incluyendo al conjunto vacío.

Notación:

$P(A) = \{x / x \subset A\}$, se lee: conjunto potencia de A.

Ejemplo: sea el conjunto $A = \{\alpha; \beta\} \Rightarrow P(A) = \{\phi; \{\alpha\}; \{\beta\}; \{\alpha; \beta\}\}$

Número de elementos del conjunto P(A) es: $n[P(A)] = 2^{n(A)}$

Para el conjunto A del ejemplo tenemos: $n[P(A)] = 2^2 = 4$

En el ejemplo, a $\varnothing; \{\alpha\}; \{\beta\}$ se les denomina subconjuntos propios.

Se cumple en general: n.º de subconjuntos propios: $2^{n(A)} - 1$

En el ejemplo, el número de subconjuntos propios es: $2^2 - 1 = 3$

Par ordenado

Es un conjunto de dos elementos para los cuales se considera el orden en que están indicados.

Notación:

(a; b); se lee: par ordenado a; b

Donde:

a: 1.ª componente $\wedge$ b: 2.ª componente

Si se cumple: $(a; b) = (c; d) \Rightarrow a = c \wedge b = d$

Nota

Veamos la siguiente aplicación:

Sean los conjuntos:

$A = \{1; 2; a; b\}$
$B = \{b; c; 2; 4\}$
$\therefore A \cup B = \{1; 2; 4; a; b; c\}$

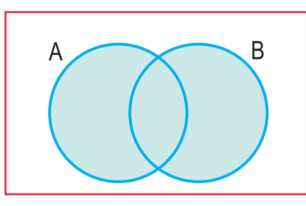
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión (∪)

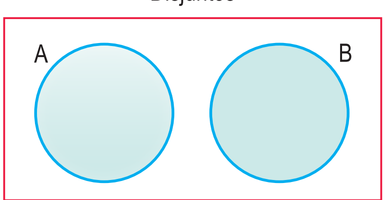
$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles):

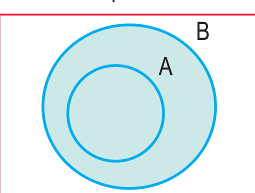
No disjuntos



Disjuntos



Comparables



De la figura:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos.
$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

Nota

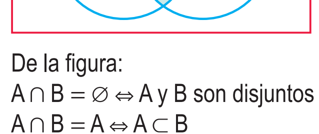
En el ejemplo anterior:
$A \cap B = \{2; b\}$

Intersección (∩)

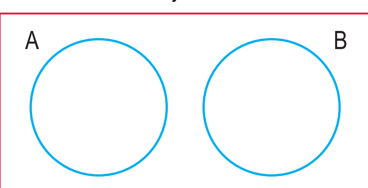
$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

Representación gráfica (casos posibles):

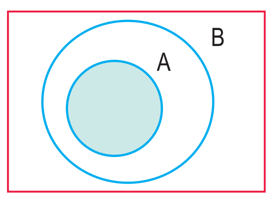
No disjuntos



Disjuntos



Comparables



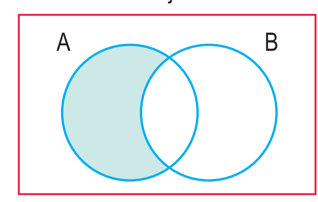
De la figura:
$A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
$A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

Diferencia (–)

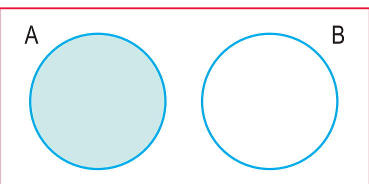
$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Representación gráfica (casos posibles):

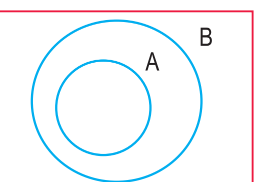
No disjuntos



Disjuntos



Comparables



De la figura:
$A - B = A \Leftrightarrow$ A y B son disjuntos
$A - B = \varnothing \Leftrightarrow A \subset B$

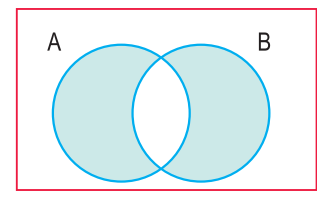
Nota
Asimismo
$A - B = \{1; a\}$

Diferencia simétrica (Δ)

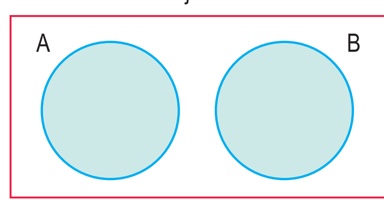
$$A \Delta B = \{x/x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

Representación gráfica (casos posibles):

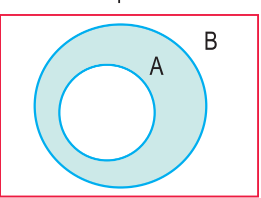
No disjuntos



Disjuntos



Comprables

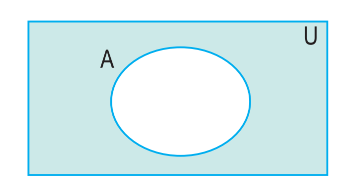


De la figura:
- $A \Delta B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
- $A \Delta B = B - A \Leftrightarrow A \subset B$

Nota
Del ejemplo:
$A \Delta B = \{1; 4; a; c\}$

Complemento (A^C o A')

$$A' = A^C = \{x/x \notin A\}$$



Nota
$U' = \varnothing$
$\varnothing' = U$

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se define el producto cartesiano como el conjunto:
$A \times B = \{(a; b)/a \in A \wedge b \in B\}$

Ejemplo:
Sean: $A = \{2; 3; 4\}$ y $B = \{7; 9\} \Rightarrow A \times B = \{(2; 7); (2; 9); (3; 7); (3; 9); (4; 7); (4; 9)\}$

Diagrama sagital

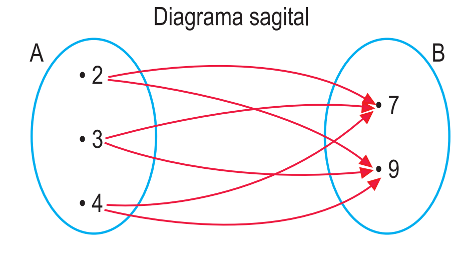
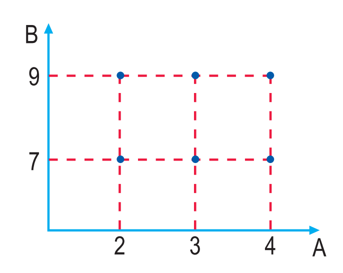


Diagrama cartesiano



Propiedades

- $n(A \times B) = n(B \times A)$
- $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
- $A \times B = B \times A \Leftrightarrow A = B$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- Si: $A \subset B \Rightarrow A \times C \subset B \times C$; para todo conjunto C
- Si: $A \subset B \wedge C \subset D \Rightarrow (A \times C) \subset (B \times D)$

Recuerda

Conjuntos coordinables o equipotentes

Decimos que dos conjuntos A y B son coordinables o equipotentes cuando es posible establecer una relación biunívoca, uno a uno, es decir, un elemento del conjunto A con un elemento del conjunto B, entre sus elementos. Como consecuencia de esto se cumple que los cardinales de A y B son iguales.

Ejemplo:

A = {Neruda; César Vallejo; García Márquez}

B = {Perú; Chile; Colombia}

Se observa una relación entre los elementos de A y B.

... nació en ...

$\therefore$ A y B son coordinables.

LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

Idempotencia:
- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$

Conmutativa:
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

Asociativa:
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributiva:
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

De Morgan:
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Absorción:
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
- $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$

Del complemento:
- $A \cup A' = U$
- $A \cap A' = \varnothing$
- $(A')' = A$

De la unidad:
- $U \cup A = U$
- $U \cap A = A$
- $\varnothing \cup A = A$
- $\varnothing \cap A = \varnothing$

Propiedades adicionales

- $A - B = A \cap B'$
- $A' - B' = B - A$
- $A \,\Delta\, B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A)$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$
- $n[P(A) \cap P(B)] = n[P(A \cap B)]$
- $n[P(A) \cup P(B)] = n[P(A)] + n[P(B)] - n[P(A) \cap P(B)]$

Problemas resueltos

1 Sea el conjunto:
$Q = \{a; \{a\}; \{b\}; \{a; \{b\}\}\}$
Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- $\{a\} \in Q$
- $\{\{b\};\{a;\{b\}\}\} \subset Q$
- $b \in Q$
- $\{b\} \subset Q$
- $\{\{a\};\{b\}\} \in Q$
- $\{\{a;\{b\}\}\} \subset Q$

Resolución:
- $\{a\} \in Q$ (verdadero)
  $\{a\}$ es un elemento del conjunto Q.
- $\{b\} \subset Q$ (falso)
  $\{b\}$ es un elemento del conjunto Q. La relación correcta es: $\{b\} \in Q$
- $\{\{b\};\{a;\{b\}\}\} \subset Q$ (verdadero)
  $\{b\}$ y $\{a;\{b\}\}$ son elementos de Q, entonces el conjunto formado por estos dos elementos es un subconjunto de Q.
- $\{\{a\}; \{b\}\} \in Q$ (falso)
  $\{\{a\};\{b\}\}$ no es un elemento de Q.
- $b \in Q$ (falso)
  b no es un elemento de Q.
- $\{\{a;\{b\}\}\} \subset Q$ (verdadero)
  $\{a;\{b\}\}$ es un elemento de Q, entonces,
  $\{\{a; \{b\}\}\}$ es un subconjunto de Q.

2 Halla el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:
a) Si $A = \{5 - x/x \in \mathbb{Z}^+ \wedge x \leq 4\}$, entonces $\{4; 5\} \subset A$.
b) $A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 2x + 4 = 5\}$ es unitario.
c) $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\}$ posee 5 elementos.

Resolución:
a) Falso
Determinamos por extensión:
$A = \{1; 2; 3; 4\}$
Luego: $\{4; 5\} \not\subset A$

b) Falso
$2x + 4 = 5$
$x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$
$\Rightarrow A = \varnothing$

c) Verdadero
$B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
$\Rightarrow n(B) = 5$

3 Sean los conjuntos no vacíos A y B. Si la suma entre la cantidad de subconjuntos de A y la cantidad de subconjuntos propios de B es igual a m + 3 y la diferencia es igual a m + 1. Calcula n(B).

Resolución:
Por dato:
- $2^{n(A)} + (2^{n(B)} - 1) = m + 3$
  $2^{n(A)} + 2^{n(B)} = m + 4$ ...(I)
- $2^{n(A)} - (2^{n(B)} - 1) = m + 1$
  $2^{n(A)} - 2^{n(B)} = m$ ...(II)

Sumando (I) y (II):
- $2 \times 2^{n(A)} = 2m + 4$
  $2^{n(A)} = m + 2$ ...(III)

Reemplazando (III) en (I):
- $m + 2 + 2^{n(B)} = m + 4$
  $2^{n(B)} = 2$
  $\therefore n(B) = 1$

4 Sean:
$A = \{3n - 8; 44\}$
$B = \{10; m^n - 20\}$
Además: $A \subset B \wedge B \subset A$
Calcula: n^m

Resolución:
Como: $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
Luego:
- $3n - 8 = 10$
  $3n = 18$
  $n = 6$
- $m^n - 20 = 44$
  $m^n = 64$
  $m^6 = 2^6$
  $m = 2$

Nos piden:
$n^m = 6^2 = 36$

5 Se tienen los conjuntos unitarios:
$M = \{a^2 + 1; 2a\}$
$N = \{3x + y; x - y + 12\}$
Halla: $a + x + y$

Resolución:
Por dato M y N son unitarios.
En M:
$a^2 + 1 = 2a$
$a^2 - 2a + 1 = 0$
$(a - 1)^2 = 0$
$\Rightarrow a = 1$

En N:
$3x + y = x - y + 12$
$2x + 2y = 12$
$x + y = 6$

Nos piden:
$a + x + y = 1 + 6 = 7$

6 Si para dos conjuntos A y B se cumple que:
$n(A) + n(B) = 16$
$n[P(A \cup B)] = 4096$
¿Cuántos subconjuntos propios tiene E?
$E = A \cap (B \cup \varnothing)$

Resolución:
Por dato:
$N[P(A \cup B)] = 4096$
$2^{n(A \cup B)} = 2^{12}$
$\Rightarrow n(A \cup B) = 12$

Además:

$$n(A \cup B) = \underbrace{n(A) + n(B)}_{16} - n(A \cap B)$$

$$12 = 16 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 4$$

Luego:

$$A \cap \underbrace{(B \cup \varnothing)}_{B} = A \cap B$$

Nos piden:

$$2^{n(A \cap B)} - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

7 Sea el conjunto $A = \{1; 2; 3; 4\}$
Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. $\exists\, x \in A / x - 1 < 3$
II. $\forall\, x \in A; x + 7 < 10$
III. $\exists\, x \in A / x^2 \leq 4$
IV. $\forall\, x \in A; x + 1 > 1$

Resolución:

I. Verdadero
Para $x = 3$: $3 - 1 = 2 < 3$

II. Falso
$x = 1$: $1 + 7 < 10$
$x = 2$: $2 + 7 < 10$
$x = 3$: $3 + 7 < 10$ (F)
$x = 4$: $4 + 7 < 10$ (F)

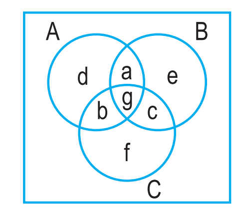
III. Verdadero
Para $x = 1$: $1^2 \leq 4$

IV. Verdadero
$x = 1$: $1 + 1 > 1$
$x = 2$: $2 + 1 > 1$
$x = 3$: $3 + 1 > 1$
$x = 4$: $4 + 1 > 1$

8 Se tiene un conjunto de 420 personas que ven los canales A, B, y C, y se observa que 240 no ven el canal A, 180 no ven el canal B, 150 no ven el canal C; los que ven solo dos canales son 230. ¿Cuántos ven los tres canales?

Resolución:

Graficamos los conjuntos:



Además, 230 por lo menos ven dos canales.

$e + c + f = 240$
$d + b + f = 180$
$d + a + e = 150$
$a + b + c = 230$
$2(a + b + c + d + e + f) = 800$
$a + b + c + d + e + f = 400$

Luego:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f}_{400} + g = 420$$

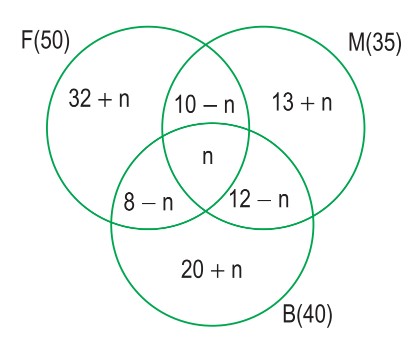
$g = 420$
$g = 20$

Las personas que ven los tres canales son 20.

9 En una conferencia internacional hay 100 científicos; de los cuales 50 son físicos, 35 son matemáticos y 40 son biológos, además, se sabe que 10 son físicos-matemáticos, 8 son físicos-biológos y 12 son biológos-matemáticos. ¿Cuántos son únicamente físicos?

Resolución:

Graficamos:



Por dato:

$$(32 + n) + (10 - n) + (8 - n) + n + (13 + n) + (12 - n) + (20 + n) = 100$$

$$95 + n = 100$$

$$\Rightarrow n = 5$$

Nos piden:

$32 + n = 32 + 5 = 37$

Por lo tanto, 37 científicos son solo físicos.

10 De un grupo de personas, se observó que de las 47 presentes, 29 eran hombres, de los cuales 19 no eran mayores de edad. Si 11 personas nacieron hoy y las mujeres mayores son tantas como las menores de edad, de estas, las que nacieron hoy representan el 20% del número de hombres mayores de edad. ¿Cuántos hombres menores de edad no nacieron hoy?

Resolución:

	Menores de edad	Mayores de edad
Hombres	10 — Nac. hoy: 9	10
Mujeres	7 — 20%(10) = 2	9

El número de hombres menores de edad que no nacieron hoy es 10.

NUMERACIÓN

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que estudia la correcta formación, representación, escritura y lectura de los números.

Conceptos previos

Número. Es la idea asociada a una cantidad, la cual nos permite cuantificar los objetos de la naturaleza.
Numeral. Es la representación gráfica y escrita de un número mediante determinados símbolos o guarismos convencionales.
Cifra. Son símbolos utilizados convencionalmente para representar los números mediante numerales.

Nota
Las cifras que emplearemos para la formación de numerales son:
0; 1; 2; ...

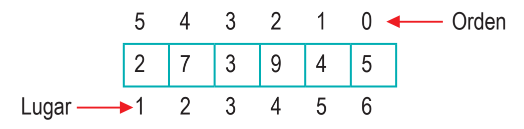
SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de reglas y principios que rigen la formación y lectura de los números, mediante la adecuada combinación de un grupo reducido de símbolos y palabras.

PRINCIPIOS DE UN SISTEMA NUMERAL

1. Toda cifra que conforma un numeral tiene asociado un orden y un lugar.
   Orden. Se cuenta de derecha a izquierda a partir de cero.
   Lugar. Se cuenta de izquierda a derecha a partir de uno.

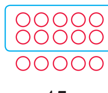
   Ejemplo:



Recuerda
La base es un numeral entero mayor o igual a 2.

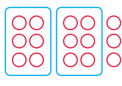
2. Todo numeral quedará expresado en una determinada base (mayor que la unidad), la cual nos indica de cuánto en cuánto agrupamos las unidades de un cierto orden para obtener unidades del orden inmediato superior.

   Ejemplo:
   - En base 10:



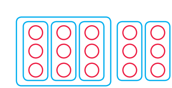
15

   - En base 6:



$23_{(6)}$

   - En base 3:



$120_{(3)}$

$$15 = 23_{(6)} = 120_{(3)}$$

3. Toda cifra que conforma un numeral, es menor que la base.

Sistemas de numeración más utilizados

BASE	NOMBRE	CIFRAS QUE UTILIZA
2	Binario	0; 1
3	Temario	0; 1; 2
4	Cuanternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...; (n – 2); (n – 1)

Nota
El sistema de numeración de base **n** utiliza **n** cifras diferentes.

Nota
La mayor cifra de un numeral en el sistema de numeración de base n es (n – 1).

Atención

Hasta aquí se puede concluir:

- La base es un número entero positivo mayor o igual a 2.
- Las cifras permitidas en un sistema de numeración de base n son: 1; 2; 3; ...; (n – 1)
- El número de cifras que se puede utilizar para la formación de numerales en cierta base, es igual a la base.

Recuerda

En una igualdad de numerales, a mayor numeral aparente le corresponde menor base; y, análogamente, a menor numeral aparente le corresponde mayor base.

Ejemplo:

$\overset{+}{234}_{\underset{-}{(5)}} = \overset{-}{126}_{\underset{+}{(7)}}$

Se observa:

$234 > 126 \ \wedge \ 5 < 7$

Nota

La paridad de un numeral se refiere a que si este es par o impar.

Observación

(# par) + (# par) = (# par)

(# impar) + (# impar) = (# par)

(# par) + (# impar) = (# impar)

(# par) × (# par) = (# par)

(# impar) × (# impar) = (# impar)

Nota

Los números impares tienen la forma: $2k + 1$; $k \in \mathbb{Z}$; y los números pares: $2k$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

4. Toda cifra que forma parte de un numeral tiene dos valores:
   Valor absoluto. Es el valor que toma la cifra tal y como figura en el numeral.
   Valor relativo. Es el valor que toma la cifra teniendo en cuenta la base y su respectivo orden.

   Ejemplo:
   Sea el numeral $25973_{(11)}$; entonces:

V.A.(3) = 3	V.R.(3) = 3×11^0
V.A.(7) = 7	V.R.(7) = 7×11^1
V.A.(9) = 9	V.R.(9) = 9×11^2
V.A.(5) = 5	V.R.(5) = 5×11^3
V.A.(2) = 2	V.R.(2) = 2×11^4

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Si en un numeral sus cifras no se conocen, estas se van a representar por medio de letras minúsculas.

Consideraciones

1. Toda expresión que esté entre paréntesis representará una cifra.

   Ejemplos:
   $\overline{(2a)a}$: 21; 42; 63; 84 $\qquad \overline{1a\,(a+7)}$: 107; 118; 129

2. La primera cifra de un numeral debe ser distinta de cero.

   Ejemplos:
   $\overline{x\,1y}_{(3)}$: $110_{(3)}$; $111_{(3)}$; $112_{(3)}$; $210_{(3)}$; $211_{(3)}$; $212_{(3)}$ (x solo puede ser 1 ó 2)

3. Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, salvo que se indique.

   Ejemplo:
   $\overline{pq}_{(3)}$: $10_{(3)}$; $11_{(3)}$; $12_{(3)}$; $20_{(3)}$; $21_{(3)}$; $22_{(3)}$

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Se define como la suma de los valores relativos de cada una de las cifras de un numeral.

Ejemplo: $5473_{(8)}$ = V.R.(5) + V.R.(4) + V.R.(7) + V.R.(3) = $5 \times 8^3 + 4 \times 8^2 + 7 \times 8 + 3$

En general:

$$\underbrace{\overline{a_k\, a_{k-1}\, a_{k-2} \ldots a_2\, a_1\, a_0}_{(n)}}_{k\,+\,1 \text{ cifras}} = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + a_{k-2} n^{k-2} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

CRITERIO DE PARIDAD DE UN NUMERAL

La paridad de un numeral se analiza mediante la descomposición polinómica, teniendo en cuenta, además que:

- $(\#\text{ par})^n = \#\text{ par}$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$
- $(\#\text{ impar})^n = \#\text{ impar}$; $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$
- $(\#\text{ par}) \times k = \#\text{ par}$; $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

1. Si la base es par, la última cifra del numeral determinará su paridad.

   Veamos:

   $$N = \overline{abcd}_{(\#\text{ par})} = \underbrace{a \times (\#\text{ par})^3 + b \times (\#\text{ par})^2 + c \times (\#\text{ par})}_{\#\text{ par}} + \textcircled{d}$$

   → Si d es par, entonces N será par y si d es impar, entonces N será impar.

2. Si la base es impar, el resultado de la suma de cifras del numeral determinará la paridad. Veamos:

   $$N = \overline{abcd}_{(\#\text{ impar})} = a \times (\#\text{ impar})^3 + b \times (\#\text{ impar})^2 + c \times (\#\text{ impar}) + d$$

   $$N = \overline{abcd}_{(\#\text{ impar})} = a \times (\#\text{ impar}) + b \times (\#\text{ impar}) + c \times (\#\text{ impar}) + d$$

   $$N = \overline{abcd}_{(\#\text{ impar})} = a \times (2k_1 + 1) + b \times (2k_2 + 1) + c \times (2k_3 + 1) + d;\ \text{donde: } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}^+$$

   $$N = \overline{abcd}_{(\#\text{ impar})} = 2ak_1 + a + 2bk_2 + b + 2ck_3 + c + d$$

$N = \overline{abcd}_{(\#\ impar)} = \underbrace{2ak_1 + 2bk_2 + m\,2ck_3}_{\#\ par} + \boxed{a + b + c + d}$

→ Si esta suma es par, entonces N será par y si esa suma es impar, entonces N será impar.

> **Atención**
> Los criterios de paridad se cumplen para numerales de cualquier cantidad de cifras.

CAMBIOS DE BASE

De base n a base 10 ($n \neq 10$)

Para convertir un número de cualquier sistema de numeración al sistema decimal, emplearemos dos métodos: descomposición polinómica y Ruffini.

Ejemplo:

Convierte $5324_{(6)}$ a base 10.

Resolución:

Por descomposición polinómica	Por Ruffini
$5324_{(6)} = 5 \times 6^3 + 3 \times 6^2 + 2 \times 6 + 4$	5 3 2 4
$5324_{(6)} = 5 \times 216 + 3 \times 36 + 2 \times 6 + 4$	6: ↓ 30 198 1200
$5324_{(6)} = 1080 + 108 + 12 + 4$	×: 5 33 200 1204
$5324_{(6)} = 1204$	$5324_{(6)} = 1204$

De base 10 a base n ($n \neq 10$)

Para convertir un número del sistema decimal a cualquier otro sistema de numeración se utiliza el método de divisiones sucesivas.

Ejemplo:
Convierte 3957 a base 7.

Resolución:

```
3957 |_7
3955  565 |_7
 (2)  560   80 |_7
      (5)   77   11 |_7
           (3)    7  (1)
                 (4)
```

Luego:
$3957 = 14352_{(7)}$

De base n a base m ($n \neq m$, ambos diferentes de 10)

Se convierte el número dado, de base n al sistema decimal, para luego llevarlo a base m.

Ejemplo:
Convierte $12304_{(5)}$ a base 8.

Resolución:

$12304_{(5)}$ → base 10 → base 8

1.º $12304_{(5)} = 1 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 0 \times 5 + 4 = 954$

2.º
```
954 |_8
952  119 |_8
(2)  112   14 |_8
     (7)    8  (1)
           (6)
```

Luego:
$12304_{(5)} = 1672_{(8)}$

> **Nota**
> **Numeral capicúa:** son aquellos numerales cuyas cifras equidistantes son iguales.
> Ejemplos:
> $\overline{aba}_{(n)}$; $\overline{abba}_{(c)}$; $123321_{(s)}$; $\overline{mm}_{(k)}$

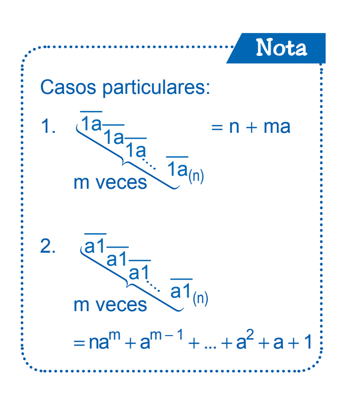
PROPIEDADES

Numeral con cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{k\ cifras} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1z}_{(n)}}}}} = a + b + c + \ldots + z + n$$



Intervalo para un numeral $N_{(n)}$ con cierta cantidad de cifras

$$n^{k-1} \leq N_{(n)} < n^k$$

Donde k es el número de cifras de $N_{(n)}$.

Problemas resueltos

1 Calcula n + a si:
$\overline{a71}_{(n)} = \overline{a25}_{(9)}$

Resolución:
Por propiedad:

$\overset{+}{\overline{a71}}_{(n)} = \overset{-}{\overline{a25}}_{(9)} \Rightarrow 7 < n < 9$

($\overline{a71}$ lleva − debajo, $\overline{a25}$ lleva + debajo; $n = 8$)

Luego:
$\overline{a71}_{(8)} = \overline{a25}_{(9)}$

Descomponemos polinómicamente:
$a \times 8^2 + 7 \times 8 + 1 = a \times 9^2 + 2 \times 9 + 5$
$64a + 57 = 81a + 23$
$34 = 17a$
$\Rightarrow a = 2$

Nos piden:
$n + a = 8 + 2 = 10$

2 Si se sabe que los numerales $222_{(a)}$; $\overline{44bc}_{(6)}$; $\overline{1a2}_{(b)}$ y $\overline{b0a}_{(c)}$ están bien escritos y **a**, **b** y **c** son cifras diferentes entre sí, calcula: a + b + c

Resolución:
Observamos cada numeral:

- $222_{(a)} \Rightarrow$ $a > 2$
- $\overline{44bc}_{(6)} \Rightarrow$ $b < 6 \wedge$ $c < 6$
- $\overline{1a2}_{(b)} \Rightarrow$ $a < b$
- $\overline{b0a}_{(c)} \Rightarrow$ $b < c$ $\wedge$ $a < c$

Luego:
$2 < a < b < c < 6$
$a = 3$, $b = 4$, $c = 5$

Nos piden: $a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12$

3 Si:
$\overline{3a1}_{(b)} + \overline{22b}_{(c)} + 45_{(a)} + \overline{10c}_{(d)} = \overline{e5d}$
Calcula: a + b + c + d + e

Resolución:
Observamos los numerales que conforman la suma:

- $\overline{3a1}_{(b)} \Rightarrow a < b$
- $\overline{22b}_{(c)} \Rightarrow b < c$
- $45_{(a)} \Rightarrow 5 < a$
- $\overline{10c}_{(d)} \Rightarrow c < d$
- $\overline{e5d} \Rightarrow d < 10$

Luego:
$5 < a < b < c < d < 10$
$a = 6$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 9$

Expresamos en el sistema decimal:
$361_{(7)} + 227_{(8)} + 45_{(6)} + 108_{(9)} = \overline{e59}$
$3 \times 7^2 + 6 \times 7 + 1 + 2 \times 8^2 + 2 \times 8 + 7 + 4 \times 6 + 5 + 1 \times 9^2 + 8 = \overline{e59}$
$147 + 42 + 1 + 128 + 16 + 7 + 24 + 5 + 81 + 8 = \overline{e59}$
$459 = \overline{e59}$
$\Rightarrow e = 4$

Nos piden: $a + b + c + d + e = 6 + 7 + 8 + 9 + 4 = 34$

4 El número 139 (en base 10), se escribe como 256 en base x. Halla el valor de x.

Resolución:
Del enunciado: $256_{(x)} = 139$
Descomponemos polinómicamente el 1.[er] miembro:
$2x^2 + 5x + 6 = 139$
$2x^2 + 5x = 133$
$x(2x + 5) = 7 \times 19$

$\therefore x = 7$

5 Si $\overline{a71}_{(n)} = \overline{a06}_{(b)} = \overline{dcb}$; halla: a + b + c + d + n

Resolución:
Por propiedad: $\overset{+}{\overline{a71}}_{(n)} = \overset{-}{\overline{a06}}_{(b)}$ ($\overline{a71}$ lleva − debajo, $\overline{a06}$ lleva + debajo)

$\Rightarrow 7 < n < b$

Además, del numeral $\overline{dcb}$, se tiene que b es una cifra, entonces:
$7 < n < b < 10$
$n = 8$, $b = 9$

Luego: $\overline{a71}_{(8)} = \overline{a06}_{(9)}$
Descomponemos polinómicamente:
$a \times 8^2 + 7 \times 8 + 1 = a \times 9^2 + 0 \times 9 + 6$
$64a + 56 + 1 = 81a + 6$
$51 = 17a$
$\Rightarrow a = 3$

Por lo tanto:
$306_{(9)} = 3 \times 9^2 + 6 = 249 = \overline{dcb} \Rightarrow d = 2; c = 4$

Nos piden: $a + b + c + d + n = 3 + 9 + 4 + 2 + 8 = 26$

6 La suma de cifras del numeral $157_{(n)}$ en base n + 1 es $\frac{n+6}{2}$.
Halla n.

Resolución:
Descomponemos polinómicamente:
$157_{(n)} = n^2 + 5n + 7$
$= n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 + 3$
$= (n + 1)^2 + 3(n + 1) + 3$
$= 133_{(n+1)}$

Por dato:

$1 + 3 + 3 = \frac{n+6}{2}$

$7 = \frac{n+6}{2}$

$\therefore\ n = 8$

También se puede realizar el cambio de base mediante la siguiente división polinómica:

$$157_{(n)} = n^2 + 5n + 7 \div (n+1)$$

$n^2 + 5n + 7 = (n+1)(n+4) + 3$; $\ -n^2 - n$; $4n + 7$; $-4n - 4$; residuo 3

$n + 4 = (n+1)\cdot 1 + 3$; $-n - 1$; residuo 3; cociente 1

$\Rightarrow 157_{(n)} = 133_{(n+1)}$

7 Determina el valor de n si:
$421_{(n)} = 313_{(n+1)}$

Resolución:

Descomponemos polinómicamente:

$421_{(n)} = 313_{(n+1)}$

$4n^2 + 2n + 1 = 3(n+1)^2 + (n+1) + 3$

$4n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 6n + 3 + n + 1 + 3$

$4n^2 - 3n^2 + 2n - 7n = 6$

$n^2 - 5n = 6$

$n(n-5) = 6$

$\downarrow\ \downarrow$

$6\ \ 6$

Por lo tanto: $n = 6$

8 Si se cumple que $\overline{ab9} = 1331_{(n)}$; expresa $\overline{(2b)(a-1)}_{(n-1)}$ en base nueve.

Resolución:

Por descomposición polinómica:

$\overline{ab9} = 1331_{(n)}$

$\overline{ab9} = 1 \times n^3 + 3 \times n^2 + 3 \times n + 1$

$\overline{ab9} = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$\overline{ab9} = (n+1)^3$

Tenemos:

$4^3 = 64$ ✗	$7^3 = 343$ ✗	$10^3 = 1000$ ✗
$5^3 = 125$ ✗	$8^3 = 512$ ✗	
$6^3 = 216$ ✗	$9^3 = 729$ ✓	

Luego:

$\overline{ab9} = (n+1)^3 \quad \Rightarrow \overline{ab9} = 9^3$

$\quad\ \downarrow \qquad\qquad\quad \overline{ab9} = 729$

$\quad\ 8 \qquad\qquad\ \Rightarrow a = 7;\ b = 2$

Nos piden en base nueve:

$\overline{(2b)(a-1)}_{(n-1)} = 46_{(7)} = 4 \times 7 + 6 = 28 + 6 = 34$

$34 \div 9$: $34 = 9 \times 3 + 7$ (27; residuo 7; cociente 3)

Por lo tanto: $46_{(7)} = 37_{(9)}$

9 Halla el número $\overline{abab}$ que sumado con el producto de $\overline{ab}$ con el menor número cuya suma de cifras es 20, resulta 13 600.

Resolución:

El menor número cuya suma de cifras es 20 es 299.

Del enunciado:

$\overline{abab} + \overline{ab} \times 299 = 13\,600$

$100\overline{ab} + \overline{ab} + 299\overline{ab} = 13\,600$

$400\overline{ab} = 13\,600$

$\Rightarrow \overline{ab} = 34$

Nos piden el numeral: $\overline{abab} = 3434$

10 Si $\overline{ba}_{(n)} = \overline{an}_{(m)}$; $m < 5$; halla el valor de k si se cumple:

$$\left.\overline{ab}_{\overline{ab}_{\overline{ab}_{\cdot_{\cdot_{\overline{ab}_{(k)}}}}}}\right\}\ \overline{mn}\text{ veces} = 151_{21_{(3)}}$$

Resolución:

En el numeral $\overline{an}_{(m)}$ se observa que $n < m$, entonces se cumple:

$\overset{+}{\overline{ba}}_{(n)} = \overset{-}{\overline{an}}_{(m)}$
$\ \ -\qquad\quad +$

$\Rightarrow a < b$; ya que $a < n$.

Además: $a > 0$ y $b < n$

Luego:

$0 < a < b < n < m < 5$ → Por dato

$\quad\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$

$\quad\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$

Entonces:

$$\left.12_{12_{12_{\cdot_{\cdot_{12_{(k)}}}}}}\right\}\ 34\text{ veces} = 151_{21_{(3)}} = 151_{(7)}$$

Por propiedad:

$k + 2 \times (34) = 151_{(7)}$

$k + 68 = 7^2 + 5 \times 7 + 1$

$k + 68 = 49 + 35 + 1$

$k + 68 = 85$

$\therefore\ k = 17$

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

Observación

Ten en cuenta las propiedades de la adición en $\mathbb{Z}$:

- **Clausura**
  $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b $\in \mathbb{Z}$
- **Conmutativa**
  $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b = b + a
- **Asociativa**
  $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$:
  (a + b) + c = a + (b + c)
- **Del elemento neutro aditivo**
  $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + 0 = 0
- **Del inverso aditivo**
  $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + (–a) = 0

ADICIÓN

Es la operación aritmética que consiste en reunir varias cantidades homogéneas, llamadas sumandos, en una sola llamada suma.

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = \underset{\text{Suma}}{S}$$

Sumandos ($A_1, \ldots, A_n$)

Ejemplo:
Si: a + b + c + d = 21, calcula: $\overline{a1d2} + \overline{c4b0} + \overline{d5c3} + \overline{b6a1}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} \overline{a1d2}\ + \\ \overline{c4b0} \\ \overline{d5c3} \\ \overline{b6a1} \\ \hline 22816 \end{array}$$

- **En el orden 0:** 2 + 0 + 3 + 1 = 6
- **En el orden 1:** b + d + c + a = 21
  Escribimos el 1 y llevamos al siguiente orden (orden 2).
- **En el orden 2:** 1 + 4 + 5 + 6 + 2 = 18
  Escribimos el 8 y llevamos 1 al siguiente orden (orden 3).
- **En el orden 3:** a + c + d + b + 1 = 21 + 1 = 22

Adición en otros sistemas de numeración

Observa el procedimiento mediante el siguiente ejemplo:
Efectúa: $542_{(6)} + 143_{(6)}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} 542_{(6)}\ + \\ 143_{(6)} \\ \hline 1125_{(6)} \end{array}$$

3210 ← orden

- **En el orden 0:** 2 + 3 = 5
  Como no excede a la base, escribimos directamente esta cifra en el orden 0 de la suma.
- **En el orden 1:** 4 + 4 = 8
  Excede a la base. Observamos que hay una base y sobra 2; es decir:
  8 = 1 × 6 + 2
  Entonces escribimos 1 en el orden 1 de la suma y llevamos 2 al siguiente orden.
- **En el orden 2:** 5 + 1 + 1 = 7
  Excede a la base. Observamos que hay una base y sobra 1; es decir:
  7 = 1 × 6 + 1
  Entonces escribimos la cifra 1 en el orden 2 y la cifra 1 en el orden 3 de la suma.

Nota

Sumas notables:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

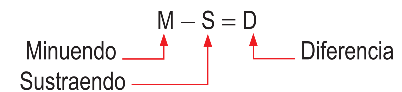
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

SUSTRACCIÓN

Es la operación inversa a la adición que tiene por objeto, a partir de dos cantidades denominadas minuendo y sustraendo, obtener una tercera llamada diferencia, que determina la cantidad de unidades en que el minuendo excede al sustraendo.

$$M - S = D$$



Sustracción en otros sistemas de numeración

Explicamos el procedimiento mediante el siguiente ejemplo:
Efectúa: $613_{(7)} - 452_{(7)}$

Resolución:

210 ← orden

$$\begin{array}{r} 613 \\ 452_{(7)} \\ \hline 131_{(7)} \end{array}$$

- **En el orden 0:** 3 – 2 = 1
  Escribimos esta cifra en el orden cero de la diferencia.
- **En el orden 1:** 1 – 5
  Como esta operación no se puede efectuar en el conjunto $\mathbb{Z}^+$, entonces el orden 2 le prestará 7 unidades al orden 1, es decir: 7 + 1 – 5 = 3
  Escribimos esta cifra en el orden 1 de la diferencia.
- **En el orden 2:** (6 – 1) – 4 = 1, ya que le prestó una base al orden 1.

Propiedades de la sustracción

1. El minuendo es igual a la suma del sustraendo y la diferencia.

$$M = S + D$$

2. La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$M + S + D = 2M$$

3. Si $\overline{ab}_{(n)} - \overline{ba}_{(n)} = \overline{pq}_{(n)}$, donde $a > b$ y $n \geq 3$, entonces:

$$p + q = n - 1$$

4. Si $\overline{abc}_{(n)} - \overline{cba}_{(n)} = \overline{pqr}_{(n)}$, donde $a > c$ y $n \geq 3$, entonces:

$$p + r = q = n - 1$$

COMPLEMENTO ARITMÉTICO (C. A.)

Se denomina complemento aritmético de un número natural a la cantidad que le falta a dicho número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior, a su cifra de mayor orden. El C. A. de un numeral N de k cifras en base n, lo podemos claclular así:

$$C.\,A.\,(N) = 10^k_{(n)} - N$$

Ejemplos:

- $C.\,A.\,(746) = 10^3 - 746 = 1000 - 746 = 254$
- $C.\,A.\,(25_{(7)}) = 10^2_{(7)} - 25_{(7)} = 42_{(7)}$

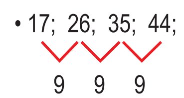
PROGRESIÓN ARITMÉTICA

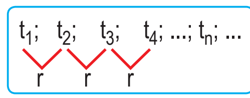
Es un conjunto de números ordenados de tal manera que la diferencia entre dos términos consecutivos es una cantidad constante llamada razón aritmética.

Ejemplos:

- 45; 51; 57; 63; ... (6 6 6)
- 17; 26; 35; 44; ... (9 9 9)
- 119; 122; 125; 128; ... (3 3 3)

En general: $t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ ...;\ t_n;\ ...$ (r r r)





Donde: t_1 es el primer término, t_n el término enésimo, "r" la razón y n el número de términos.

Fórmulas

1. Término general: $t_n = t_1 + r\,(n - 1)$
2. Razón: $r = t_2 - t_1 = t_n - t_{n-1}$
3. Número de términos: $n = \dfrac{t_n - t_1}{r} + 1$
4. Suma de términos: $S = \left(\dfrac{t_1 + t_n}{2}\right) \times n$

Conteo de cifras usadas en una progresión aritmética

Sea N un entero positivo de k cifras. La cantidad de cifras que se utiliza al escribir todos los números enteros desde 1 hasta N, está dada por:

$$\text{Cantidad de cifras usadas} = (N + 1)k - \underbrace{111\ldots11}_{k \text{ cifras}}$$

MÉTODO COMBINATORIO

Lo usaremos para determinar cuántos números de cierta cantidad de cifras existen en un determinado sistema de numeración. La cantidad total de números que se pueden formar con varios ordenamientos independientes, es igual al producto de las cantidades de las valores que puedan adoptar dichos ordenamientos respecto al valor que toma su cifra correspondiente.

Nota

En el sistema decimal:
Si $\overline{ab} - \overline{ba} = \overline{xy}$, $a > b$, entonces:
$x + y = 9$
y si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$, $a > c$, entonces:
$x + z = 9 \wedge y = 9$

Atención

En forma práctica, el C.A. de un número entero positivo, escrito en base n, consiste en restar de n la última cifra significativa, mientras que a las demás cifras de orden superior se le restan de (n – 1).

Ejemplo:
C.A. $(48300_{(9)})$
$= \overline{(8-4)\,(8-8)\,(9-3)\,00}_{(9)}$
$= 40600_{(9)}$

Nota

- Sea la progresión aritmética: $\underbrace{17;\ 26;\ 35;\ ...;\ 215}_{23 \text{ términos}}$

  Entonces:
  $S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right) \times n = \left(\frac{17 + 215}{2}\right) \times 23$
  $S = 2668$

- Si el número de términos de una progresión aritmética es impar, existirá un único término central, el cual se calcula así:
  $tc = \dfrac{t_1 + t_n}{2}$

Recuerda

La cifra de mayor orden en un número, es distinta de cero.

Nota

Cuando aparezcan cifras repetidas o dependientes, solo se analizará una de ellas.

Observación

Ten en cuenta las propiedades de la multiplicación en $\mathbb{Z}$:

- **Clausura**
  $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ b $\in \mathbb{Z}$
- **Conmutativa**
  $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ b = b $\times$ a
- **Asociativa**
  $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$: (a $\times$ b) $\times$ c = a $\times$ (b $\times$ c)
- **Del elemento neutro multiplicativo**
  $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ 1 = a
- **Del inverso multiplicativo**
  $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$ – {0}: a $\times$ a^{-1} = 1
- **Distributiva**
  $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ (b + c) = a $\times$ b + a $\times$ c

Nota

- (# par) $\times$ ... 5 = ... 0
- (# impar) $\times$ ...5 = ... 5
- $\forall$ n $\in \mathbb{Z}$: n(n + 1) = (# par)

Ejemplo:
¿Cuántos números de 3 cifras existen en el sistema heptanario?

Resolución:

a	b	$c_{(7)}$
1	0	0
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	5	5
	6	6

$6 \times 7 \times 7 = 294$

Por lo tanto, en el sistema heptanario existen 294 números de 3 cifras.

MULTIPLICACIÓN

Es la operación aritmética que tiene por objeto, a partir de dos cantidades denominadas multiplicando y multiplicador, hallar una tercera llamada producto, que contenga al multiplicando tantas veces como el multiplicador lo indique.

$$P = A \times B = \underbrace{A + A + A + ... + A + A}_{B \text{ veces}}$$

Producto → P; Multiplicando → A; Multiplicador → B

Algoritmo de la multiplicación

$$\begin{array}{rr}
\text{Multiplicando} \rightarrow & 2315 \times \\
\text{Multiplicador} \rightarrow & \underline{224} \\
 & 9260 \\
 & 4630 \\
 & \underline{4630} \\
\text{Producto} \rightarrow & 518560
\end{array}$$

9260, 4630, 4630: Productos parciales

Multiplicación en otros sistemas de numeración

Observa el procedimiento mediante el siguiente ejemplo:
Efectúa: $37_{(8)} \times 54_{(8)}$

Resolución:
Escribimos los términos verticalmente:

$$\begin{array}{r} 37_{(8)} \times \\ \underline{54_{(8)}} \end{array}$$

Luego:

- Se multiplica 4 $\times$ 7 = 28. Este resultado se expresa en base 8; siendo 28 = $34_{(8)}$; luego se escribe 4 y se lleva 3.

$$\begin{array}{r} {}^{3}37_{(8)} \times \\ \underline{54_{(8)}} \\ 4_{(8)} \end{array}$$

- Se multiplica 4 $\times$ 3 = 12. A este resultado se le suma 3, resultando 15; lo expresamos en base 8; siendo 15 = $17_{(8)}$; luego se escribe 7 y a su izquierda 1.

$$\begin{array}{r} 37_{(8)} \times \\ \underline{54_{(8)}} \\ 174_{(8)} \end{array}$$

- Se multiplica 5 $\times$ 7 = 35. Este resultado se expresa en base 8, siendo 35 = $43_{(8)}$; luego se escribe 3 y se lleva 4.

$$\begin{array}{r} {}^{4}3\,7_{(8)} \times \\ 5\,4_{(8)} \\ \hline 1\,7\,4_{(8)} \\ 3\phantom{_{(8)}} \end{array}$$

- Se multiplica 5 $\times$ 3 = 15. A este resultado se le suma 4, resultando 19; lo expresamos en base 8, siendo 19 = $23_{(8)}$; luego se escribe 3 y a su izquierda 2.

$$\begin{array}{r} 37_{(8)} \times \\ \underline{54_{(8)}} \\ 174_{(8)} \\ \underline{233_{(8)}} \end{array}$$

- Se efectúa la suma de los productos parciales en base 8.

$$\begin{array}{r} 37_{(8)} \times \\ \underline{54_{(8)}} \\ 174_{(8)} \\ \underline{233_{(8)}} \\ 2524_{(8)} \end{array}$$

DIVISIÓN

Es una operación aritmética inversa a la multiplicación que tiene por objetivo, a partir de dos números denominados dividendo (D) y divisor (d), hallar un tercero llamado cociente (q), que indique cuántas veces contiene el dividendo al divisor.

Clases de división

1. División exacta

Es aquella división en la que el dividendo es exactamente igual que el producto del divisor por el cociente.

$$D \,\underline{|\, d \,}\quad q \Rightarrow \boxed{D = d \times q}$$

2. División inexacta

Es aquella división en la cual se va a obtener un nuevo término llamado residuo. Se subclasifica en:

División inexacta por defecto. Cuando el cociente multiplicado por el divisor es menor que el dividendo.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \Rightarrow \boxed{D = d \times q + r}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline \underline{32} & 4 \\ 3 & \end{array} \Rightarrow 35 = 8 \times 4 + 3$$

División inexacta por exceso. Cuando el cociente multiplicado por el divisor es mayor que el dividendo, considerando a dicho cociente como el mínimo posible, siendo este q + 1.

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r_e & q+1 \end{array} \Rightarrow \boxed{D = d(q+1) - r_e}$$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 35 & 8 \\ \hline \underline{40} & 5 \\ 5 & \end{array} \Rightarrow 35 = 8 \times 5 - 5$$

Propiedades de la división inexacta

1. $0 < \text{residuo} < d$	3. $r + r_e = d$
2. $r_{máximo} = d - 1$ $r_{mínimo} = 1$	4. $q_e = q + 1$

Número de cifras de un cociente

El número de cifras enteras del cociente de una división de dos números enteros es igual a la diferencia entre el número de cifras del dividendo y del divisor, o esta diferencia aumentada en uno.

Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 125 & 18 \\ \hline 17 & 6 \end{array}$

  n.° de cifras del cociente: 3 – 2 = 1

- $\begin{array}{r|l} 82\,675 & 32 \\ \hline 19 & 2583 \end{array}$

  n.° de cifras del cociente: (5 – 2) + 1 = 4

Ejemplo de aplicación:

En una división entre números enteros el cociente es 9 y el residuo es 40. Si la suma de los cuatro términos de dicha división es 509. Determina el valor de dividendo.

Resolución:

Sabemos: $D = d \times q + r$

Datos: $q = 9$; $r = 40 \wedge D + d + q + r = 509$

Entonces: $D = 9d + 40$ ...(1)

Además: $D + d + 9 + 40 = 509 \Rightarrow D + d = 460$ ...(2)

(1) en (2): $9d + 40 + d = 460 \Rightarrow d = 42$

Piden D: $D = 42 \times 9 + 40 = 418$

Nota

Alteraciones de la división entera.

Sea la división entera:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

1. Para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple:

$$\begin{array}{l|l} Dn & dn \\ \hline rn & q \end{array}$$

2. $\begin{array}{l|l} D + d & d \\ \hline r & q+1 \end{array}$

Recuerda

Suma de las "n" primeras potencias naturales de un número A:

$$S = A^0 + A^1 + A^2 + A^3 + ... + A^{n-1} = \frac{A^n - 1}{A - 1}$$

Problemas resueltos

1 Halla $a \times b \times c$, en: $\overline{a7c} + \overline{c6a} + \overline{5b9} = \overline{1c26}$

Resolución:

$$\begin{array}{r} a\,7\,c\,+ \\ c\,6\,a \\ 5\,b\,9 \\ \hline 1\,c\,2\,6 \end{array}$$

En el orden 0: $c + a = 7$
En el orden 1: $14 + b = ...2$
$\Rightarrow b = 8$
En el orden 2: $2 + 12 = \overline{1c}$
$\Rightarrow c = 4$
Luego: $a = 3$
$\therefore\ a \times b \times c = 96$

2 Si $a + b + c = 12$, calcula:
$S = \overline{b2a}_{(7)} + \overline{c3b}_{(7)} + \overline{a1c}_{(7)}$

Resolución:

Tenemos:
$$\begin{array}{r} \overline{b\,2\,a}_{(7)} + \\ \overline{c\,3\,b}_{(7)} \\ \overline{a\,1\,c}_{(7)} \\ \hline 1605_{(7)} \end{array}$$

Veamos:
Orden 0:
$a + b + c = 12 = 1 \times 7 + 5$ (1 lleva, 5 queda)

Orden 1:
$2 + 3 + 1 + 1 = 7 = 1 \times 7 + 0$ (1 lleva, 0 queda)

Orden 2:
$b + c + a + 1 = 13 = 1 \times 7 + 6$ (1 lleva, 6 queda)

$\therefore\ S = 1605_{(7)}$

3 Calcula la suma de las dos últimas cifras de E, siendo:
$E = 2_{(3)} + 22_{(3)} + 222_{(3)} + ... + \underbrace{22...2}_{7\ \text{cifras}}{}_{(3)}$

Resolución:
Ordenando verticalmente los sumandos tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} 2_{(3)} + \\ 22_{(3)} \\ \vdots \\ 22\cdots2_{(3)} \end{array}\right\} 7\ \text{cifras}$$
$$\overline{\quad ...12_{(3)}}$$

Veamos:
Orden 0:
$\underbrace{2 + 2 + 2 + ... + 2}_{7\ \text{veces}} = 14 = 4 \times 3 + 2$ (4 lleva, 2 queda)

Orden 1:
$\underbrace{2 + 2 + 2 + ... + 2}_{6\ \text{veces}} + 4 = 16 = 5 \times 3 + 1$ (5 lleva, 1 queda)

$\therefore\ S = 1 + 2 = 3$

4 Si $\overline{abc}_{(9)} + \overline{4pq}_{(9)} = \overline{cba}_{(9)}$, calcula: $2p + 3q$

Resolución:
$\overline{abc}_{(9)} + \overline{4pq}_{(9)} = \overline{cba}_{(9)}$
$\overline{4pq}_{(9)} = \overline{cba}_{(9)} - \overline{abc}_{(9)}$
Por propiedad: $p = 8 \wedge 4 + q = 8$
$q = 4$
Luego: $2p + 3q = 2(8) + 3(4) = 28$

5 Si $C.A.(\overline{mnp}) + C.A.(\overline{pnm}) = 1190$
Además: $\overline{mnp} - \overline{pnm} = \overline{3...}$
Halla: $m + n - p$

Resolución:
$C.A.(\overline{mnp}) + C.A.(\overline{pnm}) = 1190$
$2000 - (\overline{mnp} + \overline{pnm}) = 1190$
$\overline{mnp} + \overline{pnm} = 810$ ...(1)
Ahora: $\overline{mnp} - \overline{pnm} = \overline{3...}$
Por propiedad: $\overline{mnp} - \overline{pnm} = 396$ ...(2)
(1) + (2):
$\overline{mnp} + \overline{pnm} = 810$
$\overline{mnp} - \overline{pnm} = 396$
$\Rightarrow \overline{mnp} = 603$
$\therefore\ m + n - p = 6 + 0 - 3 = 3$

6 Si: $R \times 22_{(3)} = ...984$
$R \times 13_{(4)} = ...861$
Halla la suma de las tres últimas cifras de $R \times 15$.

Resolución:
$R \times 22_{(3)} = ...984$
$\Rightarrow R \times 8 = ...984$ ...(I)
$R \times 13_{(4)} = ...861$
$\Rightarrow R \times 7 = ...861$ ...(II)
Sumando (I) y (II): $R \times 15 = ...845$
La suma pedida es: $8 + 4 + 5 = 17$

7 El producto de dos números es 957. Si a uno de ellos se le adiciona 13 unidades, el nuevo producto es 1386. ¿Cuál es la suma de los dos números iniciales?

Resolución:
Sean los números: a y b
$a \cdot b = 957$ ... (1)
Del dato:
$a \cdot (b + 13) = 1386$
$a \cdot b + 13a = 1386$
$957 + 13a = 1386 \Rightarrow a = 33$
Reemplazando en la ecuación (1): $b = 29$
$\therefore a + b = 62$

8 Si: $\overline{mn} \times a = 342$
$\overline{mn} \times b = 456$
Calcula: $\overline{ba} \times \overline{mn}$

Resolución:

Ordenando convenientemente:

$$\begin{array}{r} \overline{mn}\times \\ \underline{\overline{ba}} \\ 342 \\ \underline{456} \\ 4902 \end{array}$$

342 ⟵ 1.^{er} producto parcial ($\overline{mn} \times a$)
456 ⟵ 2.º producto parcial ($\overline{mn} \times b$)

$\therefore\ \overline{ba} \times \overline{mn} = 4902$

9 En una división inexacta el dividendo es 1876, el divisor es el triple del cociente y el residuo es mínimo. Calcula el cociente.

Resolución:

Utilizando los datos:

$$\begin{array}{r|l} 1876 & 3q \\ \hline 1 & q \end{array} \Rightarrow 1876 = 3q\,.\,q + 1$$

$1875 = 3q^2$

$625 = q^2$

$\Rightarrow q = 25$

$\therefore$ El cociente es: 25

10 Al dividir $\overline{abc}$ entre 13, se obtiene $\overline{bc}$ de cociente y un residuo máximo. ¿Cuántos números cumplen esta condición?

Resolución:

Del enunciado:

$$\begin{array}{r|l} \overline{abc} & 13 \\ \hline 12 & \overline{bc} \end{array} \Rightarrow \overline{abc} = 13(\overline{bc}) + 12$$

$100a + \overline{bc} = 13(\overline{bc}) + 12$

$100a = 12(\overline{bc}) + 12$

$25 \times a = 3(\overline{bc} + 1)$

a	$\overline{bc}$
3	24
6	49
9	74

Luego: $\overline{abc} = \{324; 649; 974\}$

$\therefore$ Cumplen 3 números.

11 En una división entera inexacta, la suma de sus 4 términos es 455. Si se multiplica al dividendo y al divisor por 4, la nueva suma de sus términos es 1733. Halla el dividendo.

Resolución:

Sea la división: $D = d\,.\,q + r$ ...(1)

Por dato: $D + d + q + r = 455$ ...(2)

Cuando se multiplica al dividendo y al divisor por 4, se cumple:

$4D = 4d\,.\,q + 4r$

$\Rightarrow\ 4D + 4d + q + 4r = 1733$ ...(3)

Luego:

$(2) \times 4 - (3)$: $4q - q = 4\,.\,455 - 1733$

$q = 29$

En (1): $D = 29d + r$

En (2): $15d + r = 213$; $(d > r)$

$d = 14$, $r = 3$

$\therefore\ D = 29\,.\,14 + 3 = 409$

12 Halla la suma de cifras del complemento aritmético de un número cuya suma de cifras es 22.

Resolución:

Sea el número: $\overline{abc}$, donde $a + b + c = 22$

El C.A. $(\overline{abc}) \Rightarrow \overline{(9-a)(9-b)(10-c)}$

Piden: $9 - a + 9 - b + 10 - c$

$28 - \underbrace{(a + b + c)}_{22} = 6$

13 ¿En qué sistema de numeración existen 343 numerales capicúas de 7 cifras que tengan solo una cifra cero?

Resolución:

Si el numeral tiene una sola cifra cero, entonces será: $\overline{abc0cba}_{(n)}$

Valores correspondientes:

$a = 1; 2; \ldots; (n-1) \Rightarrow (n-1)$ valores

$b = 1; 2; \ldots; (n-1) \Rightarrow (n-1)$ valores

$c = 1; 2; \ldots; (n-1) \Rightarrow (n-1)$ valores

Total de números:

$(n-1)(n-1)(n-1) = 343$

$(n-1)^3 = 343$

$n = 8$

$\therefore$ El sistema es de base 8.

14 Calcula el número de términos de la siguiente P.A.

$\overline{a12b}_{(8)}; \overline{a14b}_{(8)}; \overline{a16b}_{(8)}; \ldots; \overline{a76b}_{(8)}$

Resolución:

En este caso si omitimos las cifras a y b de la P.A., tenemos:

$\overline{a12b}_{(8)}; \overline{a14b}_{(8)}; \overline{a16b}_{(8)}; \ldots; \overline{a76b}_{(8)}$

Los términos de la nueva P.A. equivalente son:

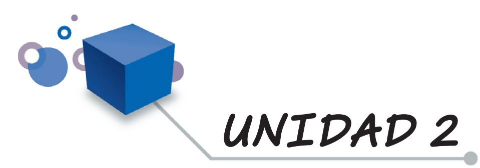
$12_{(8)}; 14_{(8)}; 16_{(8)}; \ldots; 76_{(8)}$

Sin perder generalidad, el número de términos de la P.A. es:

$$\text{n.° de términos} = \frac{76_{(8)} - 12_{(8)}}{2} + 1$$

$$\text{n.° de términos} = \frac{62 - 10}{2} + 1 = 27$$

$\therefore$ La serie original tiene también 27 términos.



UNIDAD 2

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

Nota

Si A es múltiplo de B, también se denota:
$A = mB \ \vee \ A = \overset{\circ}{B}$

Es la parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para que sea divisible por otro.

CONCEPTOS PREVIOS

Divisibilidad

Un número entero A es divisible por otro número entero positivo B si al dividir A entre B, el cociente es entero y el residuo igual a cero.

Ejemplos:

$\begin{array}{r|l} 45 & 9 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array} \Rightarrow$ 45 es divisible por 9

$\begin{array}{r|l} 56 & 8 \\ \cline{2-2} & 7 \end{array} \Rightarrow$ 56 es divisible por 8.

Recuerda

Todo número $\mathbb{Z}^+$ es divisible por si mismo y por la unidad.

Multiplicidad

Un número entero A es múltiplo de otro número entero positivo B, si existe un tercer número entero K, tal que al multiplicarlo por B resulta el número A, es decir: $A = Bk$

Ejemplos:
$45 = 9 \times (5) \Rightarrow$ 45 es múltiplo de 9.

$56 = 8 \times (7) \Rightarrow$ 56 es múltiplo de 8.

Se puede observar que los conceptos de divisibilidad y multiplicidad son equivalentes, es decir:

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \cline{2-2} & K \end{array} \Leftrightarrow A = BK \qquad A, K \in \mathbb{Z}$$

Si A es múltiplo de B, su notación será: $A = \overset{\circ}{B}$ Donde: B es el módulo de A.

Ejemplos:

$\begin{array}{r|l} -51 & 3 \\ \cline{2-2} & -17 \end{array} \Rightarrow -51$ es divisible por 3.

$\begin{array}{r|l} 36 & 4 \\ \cline{2-2} & 9 \end{array} \Rightarrow$ 36 es divisible por 4.

$-51 = 3(-17) = \overset{\circ}{3} \Rightarrow -51$ es múltiplo de 3.

$36 = 4(9) = \overset{\circ}{4} \Rightarrow$ 36 es múltiplo de 4.

Recuerda

El cero es múltiplo de todo número $\mathbb{Z}^+$.

Observaciones

1. La cantidad de divisores enteros positivos de un número entero, es limitado.
2. La cantidad de múltiplos con respecto de cierto módulo en $\mathbb{Z}^+$, es ilimitado.

Ejemplo:

Determina por extensión:

1. El conjunto de divisores de 45.
2. El conjunto de múltiplos de 8.

Resolución:

1. Sea D el conjunto de divisores de 45, entonces:
   D = {1; 3; 5; 9; 15; 45}
2. Sea M el conjunto de múltiplos de B, entonces:
   M = {...; –24; –16; –8; 0; 8; 16; 24; ...}

Nota

Todo número $\mathbb{Z}^+$ mayor que 1, posee como mínimo dos divisores: el mismo número y la unidad.

REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS NO DIVISIBLES CON RESPECTO AL MISMO MÓDULO

Cuando un número entero A no es divisible por otro número entero positivo B, es decir, la división es inexacta, se presentan dos casos:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \cline{2-2} r_e & q+1 \end{array}$
Entonces: $A = B \times q + r$	Entonces: $A = B \times (q + 1) - r_e$
Se denota: $A = \overset{\circ}{B} + r$	Se denota: $A = \overset{\circ}{B} - r_e$

Además, en la división entera se cumple que $r + r_e = B$, por lo tanto, en el caso de la divisibilidad tendremos:

$$r + r_e = \overset{\circ}{B}$$

Ejemplos:

- $47 = 9(5) + 2 = \overset{\circ}{9} + 2$ ó $47 = 9(6) - 7 = \overset{\circ}{9} - 7$; entonces $2 + 7 = \overset{\circ}{9}$
- $104 = 10(10) + 4 = \overset{\circ}{10} + 4$ ó $104 = 10(11) - 6 = \overset{\circ}{10} - 6$; entonces: $4 + 6 = \overset{\circ}{10}$

Nota

Si $x + y = \overset{\circ}{n}$, entonces se presentan 2 casos:
1. $x = \overset{\circ}{n} \wedge y = \overset{\circ}{n}$
2. $x = \overset{\circ}{n} + r \wedge y = \overset{\circ}{n} - r$

PRINCIPIOS BÁSICOS DE DIVISIBILIDAD

Las operaciones aritméticas elementales respecto a los múltiplos de un número son: adición, sustracción, multiplicación y potenciación.

Adición	Sustracción	Multiplicación	Potenciación
$\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$	$\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$	$\overset{\circ}{n} \times k = \overset{\circ}{n}, k \in \mathbb{Z}$	$(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n}, k \in \mathbb{Z}^+$
Ejemplo:	Ejemplo:	Ejemplo:	Ejemplo:
$35 + 14 = 49$	$25 - 15 = 10$	$15 \times 7 = 105$	$4^3 = 64$
$7(5) + 7(2) = 7(7)$	$5(5) - 5(3) = 5(2)$	$\overset{\circ}{15} \times 7 = \overset{\circ}{15}$	$(\overset{\circ}{4})^3 = \overset{\circ}{4}$
$\overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} = \overset{\circ}{7}$	$\overset{\circ}{5} - \overset{\circ}{5} = \overset{\circ}{5}$		

Nota

Si $x - y = \overset{\circ}{n}$, entonces se presentan 2 casos:
1. $x = \overset{\circ}{n} \wedge y = \overset{\circ}{n}$
2. $x = \overset{\circ}{n} + r \wedge y = \overset{\circ}{n} + r$

Propiedades

1. $(\overset{\circ}{n} + a) \times (\overset{\circ}{n} + b) \times (\overset{\circ}{n} + c) = \overset{\circ}{n} + a \times b \times c$

   Ejemplo:

   $$(\overset{\circ}{6} + 2) \times (\overset{\circ}{6} + 5) \times (\overset{\circ}{6} + 4) = \overset{\circ}{6} + 2 \times 5 \times 4 = \overset{\circ}{6} + 40 = \overset{\circ}{6} + \overset{\circ}{6} + 4 = \overset{\circ}{6} + 4$$

2. $(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k \quad r, k \in \mathbb{Z}^+$

   Ejemplo:

   $(\overset{\circ}{11} + 3)^4 = \overset{\circ}{11} + 3^4 = \overset{\circ}{11} + 81 = \overset{\circ}{11} + 4$

3. $$(\overset{\circ}{n} - r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^k; \text{ si k es par} \\ \overset{\circ}{n} - r^k; \text{ si k es impar} \end{cases}$$

   Donde: $r, k \in \mathbb{Z}^+$

   Ejemplos:

   $(\overset{\circ}{8} - 3)^4 = \overset{\circ}{8} + 3^4 = \overset{\circ}{8} + 81 = \overset{\circ}{8} + 1$

   $(\overset{\circ}{9} - 5)^3 = \overset{\circ}{9} - 5^3 = \overset{\circ}{9} - 125 = \overset{\circ}{9} + 1$

4. $$\overline{abcd}_{(n)} = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + d \\ \overset{\circ}{n^2} + \overline{cd}_{(n)} \\ \overset{\circ}{n^3} + \overline{bcd}_{(n)} \end{cases}$$

   Ejemplos:

   - $...8_{(9)} = \overset{\circ}{9} + 8$
   - $...27_{(11)} = \overset{\circ}{11^2} + 27_{(11)} = \overset{\circ}{121} + 27_{(11)}$
   - $...111_{(5)} = \overset{\circ}{5^3} + 111_{(5)} = \overset{\circ}{125} + 111_{(5)}$

5. Si: $$N = \begin{cases} \overset{\circ}{a} \\ \overset{\circ}{b} \\ \overset{\circ}{c} \end{cases}$$

   Entonces: $N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a; b; c)}}$

   Ejemplo:

   $$N = \begin{cases} ...100_{(2)} = \overset{\circ}{2^2} = \overset{\circ}{4} \\ ...100_{(3)} = \overset{\circ}{3^2} = \overset{\circ}{9} \\ ...10_{(7)} = \overset{\circ}{7} \end{cases}$$

   Entonces:

   $N = \overset{\circ}{\overline{MCM(4; 9; 7)}} = \overset{\circ}{252}$

6. Si: $$N = \begin{cases} \overset{\circ}{a} + r \\ \overset{\circ}{b} + r \\ \overset{\circ}{c} + r \end{cases}$$

   Entonces: $N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a; b; c)}} + r$

   Ejemplo:

   $$N = \begin{cases} ...101_{(2)} = \overset{\circ}{8} + 101_{(2)} = \overset{\circ}{8} + 5 \\ ...12_{(3)} = \overset{\circ}{9} + 12_{(3)} = \overset{\circ}{9} + 5 \\ ...5_{(7)} = \overset{\circ}{7} + 5 \end{cases}$$

   Entonces:

   $N = \overset{\circ}{\overline{MCM(8; 9; 7)}} + 5$

   $N = \overset{\circ}{504} + 5$

Observación

$(\text{n.º impar})^{(\text{n.º par})} = \overset{\circ}{8} + 1$

Recuerda

Todo número entero positivo es múltiplo de sus divisores enteros positivos.

Nota

Si $A = \overset{\circ}{n}$, entonces:
* $A \times m = \overset{\circ}{m}, m \in \mathbb{Z}^+$
* $A \times m = \overset{\circ}{\overline{A \times m}}, m \in \mathbb{Z}^+$

PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Sean A y B dos números enteros diferentes de cero. Si $A \times B = \overset{\circ}{n}$ y B y n tienen como único divisor común a la unidad, entonces $A = \overset{\circ}{n}$.

Ejemplo:

- $4N = \overset{\circ}{7} \Rightarrow N = \overset{\circ}{7}$
- $6N = \overset{\circ}{35} + 18 \Rightarrow 6(N - 3) = \overset{\circ}{35} \Rightarrow N - 3 = \overset{\circ}{35}$
- $15N = \overset{\circ}{20}$

  $15N = 20k \Rightarrow 3N = \overset{\circ}{4} \Rightarrow N = \overset{\circ}{4}$

RESTOS POTENCIALES

Se llaman restos potenciales a los diferentes residuos positivos que se obtienen al analizar las potencias de un número entero positivo mayor que 1, con respecto a un determinado módulo.

Ejemplo:
Calcula los restos potenciales de 16 con respecto al módulo 9.

Resolución:

$16^0 = \overset{\circ}{9} + 1$

$16^1 = \overset{\circ}{9} + 7$

$16^2 = \overset{\circ}{9} + 4$

$16^3 = \overset{\circ}{9} + 1$

$16^4 = \overset{\circ}{9} + 7$

$16^5 = \overset{\circ}{9} + 4$

$16^6 = \overset{\circ}{9} + 1$

$16^7 = \overset{\circ}{9} + 7$

$\vdots$

A los números 1; 7; 4; 1; 7; 4; ... se les denomina restos potenciales respecto al módulo 9. Se observa que los residuos 1; 7; 4 se repiten periódicamente; a esta cantidad de residuos diferentes se les llamará: "Gaussiano" (g).
En el problema:
$g = 3$

Nota

Si:
$6N = \overset{\circ}{21} + 15$

Entonces:

$6N = 21k + 15,\ k \in \mathbb{Z}$

$2N = 7k + 5$

$2N = \overset{\circ}{7} + 5 + 7$

$2N - 12 = \overset{\circ}{7}$

$2(N - 6) = \overset{\circ}{7}$

$N - 6 = \overset{\circ}{7}$

$\therefore N = \overset{\circ}{7} + 6$

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Son aquellas ecuaciones donde, tanto los coeficientes como las variables son números enteros. Pueden ser de dos o más incógnitas y de primer grado o de grado superior. En particular, estudiaremos la resolución de una ecuación diofántica lineal de 2 incógnitas.

$\boxed{Ax + By = C}$; donde: $A, B, C \in \mathbb{Z}$

Para que la ecuación anterior tenga solución, es necesario y suficiente que:

$$C = \overset{\circ}{\overline{MCD(A; B)}}$$

Solución general:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 - Bt \\ y &= y_0 + At \end{aligned}};\ \text{donde: } t \in \mathbb{Z}$$

Siendo x_0 e y_0 una solución particular de la ecuación.

Ejemplo:
Desarrolla la ecuación diofántica: $4x + 9y = 139$

Resolución:
Expresamos todos los términos de la ecuación en función de 4:

$4x + 9y = 139$ ...(I)

$\overset{\circ}{4} + (\overset{\circ}{4} + 1)y = \overset{\circ}{4} + 3$

$y = \overset{\circ}{4} + 3$

Luego, tenemos: $y_o = 3$ (solución particular)

Reemplazamos en la ecuación (I):

$4x + 9(3) = 139$

$4x + 27 = 139$

$x_o = 28$

Atención

Observamos que una ecuación diafántica de la forma:
$\mathbf{ax + by = n}$
tiene solución entera $\mathbf{x_0}$; $\mathbf{y_0}$ si y solo si el máximo común divisor de **a** y **b** es un divisor de **n**.

Por lo tanto:

$$\text{Solución general}\begin{cases} x = 28 - 9t \\ y = 3 + 4t \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dando valores enteros a t, se obtienen las demás soluciones para la ecuación.

t	x	y
–2	46	–5
–1	37	–1
0	28	3
1	19	7
2	10	11

CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por 2n ó 5n

Dado $N = \overline{abcde}$, entonces:

$$N = \overset{\circ}{2} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$$
$$N = \overset{\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$$
$$N = \overset{\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$$

$$N = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{5}$$
$$N = \overset{\circ}{25} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$$
$$N = \overset{\circ}{125} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$$

Divisibilidad por 3 ó 9

Dado $N = \overline{abcde}$, entonces:

$$N = \overset{\circ}{3} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$$

$$N = \overset{\circ}{9} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$$

Divisibilidad por 7

Dado $N = \overline{abcdef}$, entonces:

$$N = \overline{\underset{-2}{a}\,\underset{-3}{b}\,\underset{-1}{c}\,\underset{2}{d}\,\underset{3}{e}\,\underset{1}{f}} = \overset{\circ}{7} \Leftrightarrow (2d + 3e + f) - (2a + 3b + c) = \overset{\circ}{7}$$
$$\longleftarrow$$

Divisibilidad por 11

Sea $N = \overline{abcdef}$, entonces:

$$N = \overline{\underset{-}{a}\,\underset{+}{b}\,\underset{-}{c}\,\underset{+}{d}\,\underset{-}{e}\,\underset{+}{f}} = \overset{\circ}{11} \Leftrightarrow (b + d + f) - (a + c + e) = \overset{\circ}{11}$$
$$\longleftarrow$$

Divisibilidad por 13

Sea $N = \overline{abcdefg}$, entonces:

$$N = \overline{\underset{1}{a}\,\underset{4}{b}\,\underset{3}{c}\,\underset{-1}{d}\,\underset{-4}{e}\,\underset{-3}{f}\,\underset{1}{g}} = \overset{\circ}{13} \Leftrightarrow a + 4b + 3c - d - 4e - 3f + g = \overset{\circ}{13}$$
$$\longleftarrow$$

Divisibilidad por 33 ó 99

Dado $N = \overline{abcdef}$, entonces:

$$N = \overline{abcdef} = \overset{\circ}{33} \Leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{33}$$

$$N = \overline{abcdef} = \overset{\circ}{99} \Leftrightarrow \overline{ab} + \overline{cd} + \overline{ef} = \overset{\circ}{99}$$

Nota

Si $N = \overset{\circ}{2}$, entonces su última cifra es par o cero.

Nota

Si $N = \overset{\circ}{4}$, entonces:
$\overline{de} \in \{00; 04; 08; ...; 92; 96\}$

Nota

Si $N = \overset{\circ}{5}$, entonces la última cifra es 5 o cero.

Nota

Si $N = \overset{\circ}{25}$, entonces:
$\overline{de} \in \{00; 25; 50; 75\}$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántos números de la forma $\overline{mn1}$ son múltiplos de 23?

Resolución:

Por dato $\overline{mn1} = \overset{\circ}{23}$, entonces: $\overline{mn1} = 23k$, $k \in \mathbb{Z}$
$\quad \to$ ...7

Luego:

$101 \leq \overline{mn1} \leq 991$

$101 \leq 23k \leq 991$

$4{,}339 \leq k \leq 43{,}08$

$\to 7;\ 17;\ 27;\ 37$ (4 números)

Por lo tanto, existen 4 números de la forma $\overline{mn1}$ que son múltiplos de 23.

2 Halla p, si $\overline{31pp3p} = \overset{\circ}{7} + 5$

Resolución:

Realizamos la descomposición polinómica:

$310030 + 10^3p + 10^2p + p = \overset{\circ}{7} + 5$

$\overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 6) \times p + (\overset{\circ}{7} + 2)p + p = \overset{\circ}{7} + 5$

$\overset{\circ}{7} + 2p = \overset{\circ}{7} + 5$

$2p = \overset{\circ}{7} + 5 + 7$

$p = \overset{\circ}{7} + 6$

$\Rightarrow p = 6$

3 ¿Cuál es el menor número no divisible por 4; 6; 9; 11 y 12, que al dividirlo por estos, se obtiene restos iguales?

Resolución:

Por condición del problema:

$$N = \begin{cases} \overset{\circ}{4} + r \\ \overset{\circ}{6} + r \\ \overset{\circ}{9} + r \\ \overset{\circ}{11} + r \\ \overset{\circ}{12} + r \end{cases}$$

$\Rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{MCM(4;\ 6;\ 9;\ 11;\ 12)}} + r$

$N = \overset{\circ}{396} + r$

$N_{mín.} = 397$

4 Si $5 \times \overline{2a} = \overset{\circ}{8} - 1$; calcula a^2.

Resolución:

Se tiene: $5 \times \overline{2a} = \overset{\circ}{8} - 1$

$5 \times \overline{2a} = \overset{\circ}{8} + 7 + 8$

$5 \times \overline{2a} = \overset{\circ}{8} + 15$

$5(\overline{2a} - 3) = \overset{\circ}{8}$

Observamos que 5 y 8 tienen como divisor común a la unidad; entonces:

$\overline{2a} - 3 = \overset{\circ}{8}$

$$\overline{2a} = \overset{\circ}{8} + 3 \begin{cases} 3\ ✗ \\ 11\ ✗ \\ 19\ ✗ \\ 27\ ✓ \\ 35\ ✗ \end{cases}$$

Por lo tanto: $\overline{2a} = 27$

Nos piden: $a^2 = 7^2 = 49$

5 Si $(4522)^{\overline{1a}} = \overset{\circ}{9} + 7$; halla la suma de los valores de a.

Resolución:

Observamos que: $(4522)^{\overline{1a}} = \overset{\circ}{9} + 4^{\overline{1a}} = \overset{\circ}{9} + 7$

Analizamos los restos potenciales:

$4^0 = \overset{\circ}{9} + 1$

$4^1 = \overset{\circ}{9} + 4$

$4^2 = \overset{\circ}{9} + 7 \qquad g = 3 \Rightarrow$

$4^3 = \overset{\circ}{9} + 1$

$4^4 = \overset{\circ}{9} + 4$

$\vdots$

$4^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{9} + 1$

$4^{\overset{\circ}{3}+1} = \overset{\circ}{9} + 4$

$4^{\overset{\circ}{3}+2} = \overset{\circ}{9} + 7$

Como: $4^{\overline{1a}} = \overset{\circ}{9} + 7$

$\Rightarrow \overline{1a} = \overset{\circ}{3} + 2$

$\overline{1a} = 11;\ 14;\ 17$

Nos piden:

$11 + 14 + 17 = 42$

6 Una persona tiene S/.1200 y decide comprar sacos de arroz y azúcar de 40 y 50 soles cada saco, respectivamente. ¿De cuántas maneras se puede efectuar la compra?

Resolución:

Sea:

x: número de sacos de arroz.

y: número de sacos de azúcar.

Del enunciado:

$40x + 50y = 1200$

$4x + 5y = 120 \qquad$ ...(I)

Expresamos la ecuación en función de $\overset{\circ}{4}$:

$\overset{\circ}{4} + (\overset{\circ}{4} + 1)y = \overset{\circ}{4}$

$y = \overset{\circ}{4}$

$y_0 = 4$

Reemplazamos en (I):

$4x_0 + 5(4) = 120$

$4x_0 = 120 - 20$

$x_0 = 25$

Por lo tanto la solución general es:
$x = 25 - 5t$
$y = 4 + 4t$
$t \in \mathbb{Z}$

Determinamos todas las soluciones posibles:

t	x	y
0	25	4
1	20	8
2	15	12
3	10	16
4	5	20

Por lo tanto, la compra se puede efectuar de 5 formas.

7 Halla el máximo valor de (a + b), si el numeral $\overline{(3a)a(a+b)}$ es divisible por 3.

Resolución:

$\overline{(3a)a(a+b)} = \overset{\circ}{3}$

$\underbrace{3a}_{\downarrow\ \overset{\circ}{3}} + \underbrace{a + a + b}_{\downarrow\ \overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{3}$

Analizamos:

$\Rightarrow 2a + b = \overset{\circ}{3}$

a	b
1	1
1	7
2	2
2	5
3	3
	6

Observación:

$\overline{(3a)a(a+b)} = \overset{\circ}{3}$

$(3a) \downarrow$: 1, 2, 3

$\therefore a + b = 9$ (máximo valor)

8 Calcula: a . b; si $\overline{ab4a}$ es divisible por 88.

Resolución:

$\overline{ab4a} = \overset{\circ}{88} \begin{cases} \overset{\circ}{11} \\ \overset{\circ}{8} \end{cases}$

Divisibilidad por 11:

$\overset{-+-+}{\overline{ab4a}} = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow -a + b - 4 + a = \overset{\circ}{11}$

$b - 4 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow b = 4$

Divisibilidad por 8:

$\overline{a44a} = \overset{\circ}{8}$

$\Rightarrow \overline{44a} = \overset{\circ}{8}$

$\Rightarrow \underbrace{440}_{\overset{\circ}{8}} + a = \overset{\circ}{8}$

$\overset{\circ}{8} + a = \overset{\circ}{8}$

$a = 8$

$\therefore$ a . b = 32

9 ¿Cuál es la condición que deben satisfacer los números a y d, para que el número $\overline{a23d}$ sea múltiplo de 17?

Resolución:

Del enunciado:

$\overline{a23d} = \overset{\circ}{17}$

Por descomposición polinómica:

$1000a + 230 + d = \overset{\circ}{17}$

$(\overset{\circ}{17} - 3)a + (\overset{\circ}{17} + 9) + d = \overset{\circ}{17}$

$-3a + d + 9 = \overset{\circ}{17}$

$d - 3a = \overset{\circ}{17} + 8$

10 La cifra de las unidades del número $3^{401} - 1$ es:

Resolución:

Sabemos que:

$3^{401} - 1 = (3^4)^{100} . 3^1 - 1$

$= (81)^{100} . 3 - 1$

$= (\overset{\circ}{10} + 1)^{100} . 3 - 1$

$= \overset{\circ}{10} + 3 - 1$

$= \overset{\circ}{10} + 2$

Luego, termina en 2.

11 ¿Cuál es el resto que obtendríamos al dividir la expresión: $E = 2^{3k+1} + 2^{6k+4} + 2^3$, entre 7?

Resolución:

Observamos que:

- $2^{3k+1} = (\overset{\circ}{7} + 1)^k . 2 = \overset{\circ}{7} + 2$
- $2^{6k+4} = (\overset{\circ}{7} + 1)^k . 16 = (\overset{\circ}{7} + 1)(\overset{\circ}{7} + 2) = \overset{\circ}{7} + 2$
- $2^3 = \overset{\circ}{7} + 1$

Luego:

$E = \overset{\circ}{7} + 2 + \overset{\circ}{7} + 2 + \overset{\circ}{7} + 1$

$E = \overset{\circ}{7} + 5$

$\therefore$ El resto es 5.

ESTUDIO DE LOS DIVISORES POSITIVOS DE UN NÚMERO

Nota

$\mathbb{Z}^+ =$ Números simples (• La unidad • Números primos); Números compuestos

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Los números enteros positivos pueden ser clasificados de acuerdo a ciertas características determinadas. Observemos el siguiente cuadro:

Números	Divisores
1	1
2	1; 2
3	1; 3
4	1; 2; 4
5	1; 5
6	1; 2; 3; 6
7	1; 7
8	1; 2; 4; 8
9	1; 3; 9
⋮	⋮

Podemos notar que:

- La unidad es el único número que posee un solo divisor.
- Hay números que poseen solo dos divisores.
- Hay números que poseen 3; 4; 5 o más divisores.

Nota

Todo número compuesto posee por lo menos un divisor primo.

Nota

El menor número compuesto es el 4.

De lo anterior, los números enteros positivos, según la cantidad de divisores, se clasifican en: números simples y números compuestos.

Números simples

Son aquellos números enteros positivos que tienen a lo más dos divisores. A su vez, conformada por:

La unidad. Es el único número entero positivo que posee un solo divisor.

Números primos. Llamados también primos absolutos, son aquellos números que poseen únicamente dos divisores: la unidad y el mismo número.

$$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; ...\}$$

Números compuestos

Son aquellos números enteros positivos que tienen más de dos divisores.

$$\{4; 6; 8; 9; 10; 12; ...\}$$

Atención

- Si un número es $\overset{\circ}{4} \pm 1$; no necesariamente es primo.
- Si un número es $\overset{\circ}{6} \pm 1$; no necesariamente es primo.

Propiedades

1. El conjunto de los números primos es infinito.
2. El 2 es el único número primo par.
3. Los números 2 y 3 son los únicos números primos consecutivos.
4. Los números 3; 5 y 7 son los únicos números impares consecutivos y primos a la vez.
5. Todo número primo mayor que 2 es de la forma $\overset{\circ}{4} + 1$ ó $\overset{\circ}{4} - 1$.
6. Todo número primo mayor que 3 es de la forma $\overset{\circ}{6} + 1$ ó $\overset{\circ}{6} - 1$.

DETERMINACIÓN DE UN NÚMERO PRIMO

Dado un numeral cualquiera, para determinar si este es primo, debemos seguir los siguientes pasos:

1. Se extrae la raíz cuadrada al número dado; si es exacta, se determina que el número no es primo.
2. Si la raíz cuadrada no es exacta, se considera a todos los números primos menores e iguales que la parte entera de la raíz.
3. Se divide de menor a mayor el número dado entre cada número primo considerado.
4. Si en dichas divisiones, se obtiene al menos una exacta, el número no es primo.
5. Si todas las divisiones son inexactas, entonces el número es primo.

Ejemplo:
Determina si el número 193 es un número primo.

Resolución:
Extraemos la raíz cuadrada de dicho número: $\sqrt{193} = 13{,}89...$
Luego, los números primos menores e iguales que la parte entera son:

2; 3; 5; 7; 11; 13

Al dividir 193 entre cada uno de los números primos considerados, se tiene:

$$193\begin{cases}\overset{\circ}{2}+1\\ \overset{\circ}{3}+1\\ \overset{\circ}{5}+3\\ \overset{\circ}{7}+4\\ \overset{\circ}{11}+6\\ \overset{\circ}{13}+11\end{cases}$$

Como en ningún caso, las divisiones son exactas, entonces 193 es un número primo.

NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

Se les denomina también primos relativos o coprimos a aquellos números que tienen como único divisor común a la unidad.

Ejemplo:
¿Los números 13; 16 y 25 son PESÍ?

Resolución:
Divisores de 13: 1; 13
Divisores de 16: 1; 2; 4; 8; 16
Divisores de 25: 1; 5; 25

Se observa que 1 es el único divisor común a dichos números.

∴ 13; 16 y 25 son números PESÍ.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA (TEOREMA DE GAUSS)

Todo número entero mayor que 1 se puede descomponer como el producto de factores primos diferentes entre sí elevados a ciertos exponentes enteros positivos. Esta descomposición es única y es llamada también **descomposición canónica.**

Ejemplos:

- $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
- $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$
- $1080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Dado el numeral $N = A^{\alpha} \times B^{\beta} \times C^{\gamma}$, donde A, B y C son primos, además $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}^+$.

1. Cantidad de divisores CD(N)
   $CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\gamma + 1)$
2. Suma de divisores SD(N)
   $SD(N) = \dfrac{A^{\alpha+1}-1}{A-1} \times \dfrac{B^{\beta+1}-1}{B-1} \times \dfrac{C^{\gamma+1}-1}{C-1}$
3. Suma de las inversas de los divisores SID(N)
   $SID(N) = \dfrac{SD(N)}{N}$
4. Producto de divisores PD(N)
   $PD(N) = N^{\frac{CD(N)}{2}}$

Ejemplo:
Sea el número de N = 360, halla:
1. La cantidad de divisores.
2. La suma de divisores.
3. La suma de las inversas de los divisores.
4. El producto de divisores.

Observación

Números primos entre sí 2 a 2
Son aquellos grupos de números que al ser tomados de 2 en 2, cada par de números resultan ser PESÍ.
Ejemplo: 2; 17 y 25.

Nota

- Dos números enteros consecutivos son PESÍ.
- Dos números enteros impares consecutivos son siempre PESÍ.

Atención

Veamos la descomposición canónica de 360:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

Nota

- **Divisores simples:** Son todos aquellos divisores que a la vez son números simples.
- **Divisores compuestos:** Son todos aquellos divisores que a la vez son números compuestos.
- **Divisores primos:** Son todos aquellos divisores que a la vez son divisores primos absolutos.
- **Divisores propios:** Son todos los divisores de un número excepto el mismo número.

Nota

$CD(N) = CD_{simples} + CD_{compuestos}$

$CD_{propios} = CD(N) - 1$

$CD_{primos} = CD_{simples} - 1$

Observación

Número de maneras de descomponer un número entero como el producto de dos de sus divisiones:

$\frac{CD(N)}{2}$; si CD(N) es par.

$\frac{CD(N)+1}{2}$; si CD(N) es impar.

Resolución:
Descomponemos polinómicamente: $N = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$

1. $CD(360) = (3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1) = 24$

2. $SD(360) = \frac{2^4-1}{2-1} \times \frac{3^3-1}{3-1} \times \frac{5^2-1}{5-1} = (16-1) \times \frac{27-1}{2} \times \frac{25-1}{4} = 1170$

3. $SID(360) = \frac{SD(360)}{360} = \frac{1170}{360} = 3,25$

4. $PD(360) = 360^{\frac{CD(360)}{2}} = 360^{12}$

Observaciones

1. Si nos piden la suma de divisores de un número N, siendo estos, múltiplos de un módulo m; se tendrá:

$$SD(N \text{ que sean } \overset{\circ}{m}) = m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)$$

Ejemplo:
Halla la suma de los divisores $\overset{\circ}{12}$ del número 168.

Resolución:

$$SD(168 \text{ que sean } \overset{\circ}{12}) = 12 \times SD\left(\frac{168}{12}\right) = 12 \times SD(14) = 12 \times \left(\frac{2^2-1}{2-1}\right) \times \left(\frac{7^2-1}{7-1}\right)$$

$$= 12 \times 3 \times 8 = 288$$

Nota

Si N es PESÍ con P; y P es un número primo, entonces N será pesi con P^α.

2. Si nos piden la suma de las inversas de los divisores de un número N, siendo estos, múltiplos de un módulo m, se tendrá:

$$SID(N \text{ que sean } \overset{\circ}{m}) = \frac{SD(N/m)}{N}$$

Ejemplo:
Halla la suma de las inversas de los divisores $\overset{\circ}{45}$ del número 360.

Resolución:

$$SID(360 \text{ que sean } \overset{\circ}{45}) = \frac{SD\left(\frac{360}{45}\right)}{360} = \frac{SD(8)}{360} = \frac{15}{360} = \frac{1}{24}$$

Atención

Si N es primo, entonces:

$\phi(N) = N - 1$

3. Si nos piden el producto de los divisores de un número N, siendo estos, múltiplos de un módulo m, se tendrá:

$$PD(N \text{ que sean } \overset{\circ}{m}) = m^{CD\left(\frac{N}{m}\right)} \times PD\left(\frac{N}{m}\right)$$

Ejemplo:
Halla el producto de divisores $\overset{\circ}{4}$ del número 60.

Resolución:

$$PD(60 \text{ que sean } \overset{\circ}{4}) = 4^{CD(60/4)} \times PD\left(\frac{60}{4}\right) = 4^{CD(15)} \times PD(15) = 4^4 \times 15^2 = 240^2$$

$$= 57\,600$$

Observación

Si N > 1, entonces la suma de todos los enteros positivos menores o iguales a N y PESÍ con N es:

$S = \frac{N \times \phi(N)}{2}$

FUNCIÓN DE EULER O INDICADOR DE UN NÚMERO $\mathbb{Z}^+$

Sea N un número entero positivo cuya descomposición canónica es: $N = A^\alpha \times B^\beta \times C^\gamma$

La función de Euler está definida por:

$$\phi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{A}\right) \times \left(1 - \frac{1}{B}\right) \times \left(1 - \frac{1}{C}\right)$$

Este valor nos indica la cantidad de números enteros positivos primos entre sí con N, que existen entre dos múltiplos consecutivos de N.

Ejemplo:
Calcula el indicador de 36.

Resolución:
Sabemos que $36 = 2^2 \times 3^2$; entonces $\phi(36) = 2 \times (2-1) \times 3 \times (3-1) = 12$; luego, entre dos múltiplos consecutivos de 36 existen 12 números enteros positivos primos entre sí con 36, es decir:

$$\mathbf{0}\ \underbrace{1\ \ 5\ \ 7\ \ 11\ \ 13\ \ 17\ \ 19\ \ 23\ \ 25\ \ 29\ \ 31\ \ 35}_{\mathbb{Z}^+ \text{ PESÍ con } 36}\ \mathbf{36}$$

$$\mathbf{36}\ \underbrace{37\ \ 41\ \ 43\ \ 47\ \ 49\ \ 53\ \ 55\ \ 59\ \ 61\ \ 65\ \ 67\ \ 71}_{\mathbb{Z}^+ \text{ PESÍ con } 36}\ \mathbf{72}$$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO

Sea N un número $\mathbb{Z}^+$. La descomposición canónica del factorial de N está dada por:

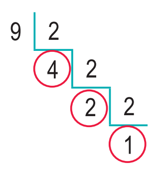
$$N! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times ...$$

Para hallar el exponente de uno de sus divisores primos, se realizan las divisiones sucesivas (dividiendo entre dicho divisor) y se suman los cocientes obtenidos.

Ejemplo:
Halla la descomposición polinómica de 9!

Resolución:
$9! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times 9 = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$

Luego:



9 | 3 → 3 | 3 → 1

9 | 5 → 1

9 | 7 → 1

$a = 4 + 2 + 1 = 7$ $\quad b = 3 + 1 = 4$ $\quad c = 1$ $\quad d = 1$

Por lo tanto: $9! = 2^7 \times 3^4 \times 5 \times 7 = 362\ 880$

MCD Y MCM

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)	MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)
El MCD de dos o más cantidades es aquel número que cumple lo siguiente:	EL MCM de dos o más cantidades es aquel número que cumple lo siguiente:
1. Es el divisor común de todos ellos. 2. Es el mayor posible.	1. Es el múltiplo común de todos ellos. 2. Es el menor posible.
Ejemplo: Para 12 y 30; sus divisores enteros positivos son:	Ejemplo: Para 10 y 15; sus múltiplos enteros positivos son:
12: 1; 2; 3; 4; 6; 12	10: 10; 20; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90
30: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30	15: 15; 30; 45; 60; 75; 90; 105; 120
Divisores comunes: 1; 2; 3; 6 Mayor	Múltiplos comunes: 30; 60; 90; ... Menor
∴ MCD (12; 30) = 6	∴ MCM (10; 15) = 30

Recuerda

$N! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times N$

Nota

$N! = \overline{ab ... xy}\underbrace{00 ... 0}_{k \text{ cifras}}{}_{(n)}$

k: es el exponente del mayor factor primo de n, en la descomposición canónica de N!.

Observación

- **Teorema de Euler:**
  Si m > 1; además a y m son PESÍ, entonces:
  $a^{\phi(m)} = \overset{\circ}{m} + 1$
- **Teorema de Wilson:**
  Si p es un número primo entonces:
  $(p-1)! = \overset{\circ}{p} - 1$

Nota

Divisores comunes de dos o más números = divisores del MCD de dichos números.

Nota

Múltiplos comunes de dos o más números = Múltiplos del MCM de dichos números.

Atención

Métodos para hallar el MCD y MCM:

DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA

30	45	105	3
10	15	35	5
2	3	7	

MCD (30; 45; 105) = $3 \times 5 = 15$
MCM (30; 45; 105) = $3 \times 5 \times 2 \times 7 \times 3 = 630$

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

$A = 2^3 \times 3^6 \times 5^2 \times 7$
$B = 2 \times 3^7 \times 5^3 \times 7^4$

$MCD(A; B) = 2 \times 3^6 \times 5^2 \times 7$
(exponentes menores)

$MCM(A; B) = 2^3 \times 3^7 \times 5^3 \times 7^4$
(exponentes mayores)

MÉTODO DE DIVISIONES SUCESIVAS O ALGORITMO DE EUCLIDES

El procedimiento se representa en el siguiente esquema:

Cocientes →		q_1	q_2	q_3	q_4
	A	B	r_1	r_2	r_3
Residuos →		r_1	r_2	r_3	0

$\Rightarrow$ MCD (A; B) = r_3

Ejemplo:

	2	1	4	1	5
198	70	58	12	10	2
	58	12	10	2	0

$\Rightarrow$ MCD (198; 70) = 2

Propiedades del MCD Y MCM

1. Si $A, B, C \in \mathbb{Z}^+$; d = MCD (A; B; C) y m = MCM (A; B; C); se tendrá:

   $A = d \times p_1$, $B = d \times p_2$, $C = d \times p_3$ → Son PESÍ

   $m = A \times q_1$, $m = B \times q_2$, $m = C \times q_3$ → Son PESÍ

2. Si $A, B \in \mathbb{Z}^+$ y PESÍ, entonces:
   MCD (A; B) = 1
   MCM (A; B) = $A \times B$

3. Si $A, B \in \mathbb{Z}^+$ y $A = \overset{\circ}{B}$, entonces:
   MCD (A; B) = B
   MCM(A; B) = A

4. Si $A, B, C, n \in \mathbb{Z}^+$; entonces:
   MCD(nA; nB; nC) = $n \times$ MCD (A; B; C)
   MCM (nA; nB; nC) = $n \times$ MCM (A; B; C)

5. Si $A, B, C, n \in \mathbb{Z}^+$; entonces:
   $$MCD\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{MCD(A; B; C)}{n}$$

6. Si $A, B, C, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:
   $MCD(A^n; B^n; C^n) = [MCD(A; B; C)]^n$
   $MCM(A^n; B^n; C^n) = [MCM(A; B; C)]^n$

7. Si $A, B \in \mathbb{Z}^+$ y son PESÍ, con $A > B$, entonces:
   $MCD(A; A \pm B) = 1$
   $MCD(B; A \pm B) = 1$

8. Si $a, b, c, n \in \mathbb{Z}^+$, entonces:
   $MCD(n^a - 1; n^b - 1; n^c - 1) = n^{MCD(a, b, c)} - 1$

9. MCD(A; B; C; D) = MCD [MCD (A;B); MCD(C;D)]
   MCM(A; B; C; D) = MCM [MCM(A; B); MCM (C;D)]

Propiedad:
Para dos números A y B se cumple que:

$$MCD(A; B) \times MCM(A; B) = A \times B$$

Ejemplo aplicativo:
Sean A y B dos números, tal que:

$$\frac{MCM(A;B)}{[MCD(A;B)]^2} = \overline{ab} \text{ y } A \times B = 18\ 144$$

Calcula el MCM (A; B).

Resolución:

$$\frac{MCM(A;B)}{[MCD(A;B)]^2} \times \frac{MCD(A;B)}{MCD(A;B)} = \overline{ab} \quad ...(1)$$

Sabemos que: $MCM(A; B) \times MCD(A; B) = 18\ 144$ ...(2)

Reemplazamos (2) en (1):
$18\ 144 = [MCD(A; B)]^3 \times \overline{ab}$
$\Rightarrow 18\ 144 = 6^3 \times 84$

Luego: MCD(A; B) = 6 ...(3)

Reemplazamos (3) en (2):
$\therefore$ MCM(A; B) = 3024

EFECTUAR

1. Halla A + B, sabiendo que:
   A = MCD(8; 15) $\wedge$ B = MCM(7; 13)
2. Sabiendo que el producto de dos números es 320 y su MCD es igual a 4; halla su MCM.
3. ¿Cuál es el menor número tal que dividido entre 6; 5 y 8 da residuo igual a 3?
4. La suma de los divisores comunes de 40 y 60 es:
5. Dos cintas de 36 m y 48 m de longitud se quieren dividir en pedazos iguales y de la mayor longitud posible. ¿Cuál será la longitud de cada pedazo y cuántos pedazos se obtienen en total?
6. Calcula el MCD de 2759 y 4717.
7. El MCD de 36k; 54k y 90k es 1620. El menor de los números será:

Problemas resueltos

1 Halla el valor de n, sabiendo que el número: $N = 21 . 15^n$ tiene 20 divisores compuestos.

Resolución:
Expresamos N como el producto de sus factores primos:
$N = 3^{n+1} . 5^n . 7^1$

Sabemos que:
$CD(N) = CD_P + CD_C + 1$

Reemplazando:
$(n + 2)(n + 1)(2) = 3 + 20 + 1$
$(n + 2)(n + 1) = 12$
$\Rightarrow n = 2$

2 ¿Cuántos divisores de 4400 son impares?

Resolución:
Descomponemos 4400 en sus factores primos de modo que 2^4 quede aislado:
$\Rightarrow 4400 = 2^4 . 5^2 . 11$
$4400 = 2^4 . (5^2 . 11)$

Luego por propiedad:
CD (impares de 4400) = (2 + 1)(1 + 1) = 6

Entonces, el número 4400 tiene 6 divisores impares.

3 ¿Cuántos terrenos de forma rectangular se podrán formar con la condición que sus lados sean cantidades enteras, en un área rectangular disponible de 2500 m^2?

Resolución:

(Rectángulo de lados a y b: 2500 m^2)

Área: $a \times b = 2500$
$2500 = 2^2 \times 5^4$
$CD(2500) = (2 + 1)(4 + 1) = 15$

Las formas de descomponer un número (N) como el producto de dos factores es:

$n.° \, F(N) = \frac{CD(N) + 1}{2}$; si CD(N) es impar.

Se cumple: n.° de terrenos = n.° F(N)

Como la CD(2500) = 15 es impar; entonces:

$n.° \text{ de terrenos} = \frac{(15) + 1}{2} = \frac{16}{2} = 8$

Por lo tanto, se podrán formar 8 terrenos.

4 Si p es primo y N es un entero positivo que al llevarse al sistema sexagesimal se expresa como mpnr(2p + 1). Halla el residuo de dividir E entre p^3, si:

$$E = N^4 + N^8 + N^{12} + ... + N^{96}$$

Resolución:
Por dato p es primo y $N = \overline{mpnr\,(2p + 1)}_{(6)}$; entonces:
p: 1; ②

Además, N al ser expresado en una base par (6), su última cifra es impar (5); entonces el número N es impar, es decir, N y 2 son primos entre sí.

Por propiedad, como 2 es primo, y N y 2 son PESÍ, entonces N y 2^3 también son PESÍ. Luego:
$N^{\phi(8)} = \overset{\circ}{8} + 1$

Como $\phi(2^3) = 2^2(2 - 1) = 4$; tenemos:
$E = N^4 + (N^4)^2 + (n^4)^3 + ... + (N^4)^{24}$
$E = \underbrace{(\overset{\circ}{8} + 1) + (\overset{\circ}{8} + 1) + (\overset{\circ}{8} + 1) + ... + (\overset{\circ}{8} + 1)}_{\text{24 sumandos}}$

$E = \overset{\circ}{8} + 24 = \overset{\circ}{8}$

Por lo tanto, el residuo de dividir E entre 2^3 es cero.

5 ¿En cuántos ceros termina la expresión?
$E = 1 . 2 . 3 . 4 ... 250$

Resolución:
$E = 250! = 2^a . 5^b . P$

Exponentes del 2:
125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 244

Exponentes del 5:
50 + 10 + 2 = 62

Luego: $E = 2^{244} . 5^{62} . P$

Hallamos el exponente de 10:
$E = 2^{182} . P . 10^{62}$
∴ E termina en 62 ceros.

6 Si: MCD(3A; B) = 3 y MCM(12A; 4B) = 572, calcula $A \times B$.

Resolución:
MCM(12A; 4B) = 572
4 MCM(3A; B) = 572 ⇒ MCM(3A; B) = 143

Sabemos: $P \times Q = MCD(P; Q) \times MCM(P; Q)$

Entonces:
$(3A) \times B = \underbrace{MCD(3A; B)}_{3} \times \underbrace{MCM(3A; B)}_{143}$

$3A \times B = 3 \times 143$
$3(A \times B) = 429 \Rightarrow A \times B = 143$

7 Si el MCD de 35A y 42B es 140. Halla el MCD de 40A y 48B.

Resolución:
MCD(35A; 42B) = 140

$MCD = \left(\frac{35A}{7}; \frac{42B}{7}\right) = \frac{140}{7}$

MCD(5A; 6B) = 20

Luego, multiplicamos por 8 a cada término:

MCD(8 . 5A; 8 . 6B) = 8 . 20
$\therefore$ MCD(40A; 48B) = 160

8 El MCM de dos números es 320. Halla dichos números, sabiendo que la diferencia entre ambos es igual a 7 veces el menor.

Resolución:
Sean los números:
A: número mayor.
B: número menor.

Por dato:
$A - B = 7B \Rightarrow A = 8B$

$$MCM(A; B) = \underbrace{MCM(8B; B)}_{8B} = 320$$

$$8B = 320$$

$\therefore$ $B = 40 \wedge A = 320$

9 Sean:
$A = 216^m \times 90$
$B = 60 \times 324^m$
$MCM(A; B) = 6 \times MCD(A; B)$
Calcula m.

Resolución:
$A = 2^{3m+1} \times 3^{3m+2} \times 5$ y $B = 2^{2m+2} \times 3^{4m+1} \times 5$

$MCM(A; B) = 6 \times MCD(A; B)$

$$\underbrace{2^{3m+1} \times 3^{4m+1} \times 5^1}_{\text{mayor exponente}} = 2 \times 3 \times \underbrace{2^{2m+2} \times 3^{m+2} \times 5^1}_{\text{menor exponente}}$$

$$2^{3m+1} \times 3^{4m+1} \times 5 = 2^{2m+3} \times 3^{m+3} \times 5$$

Igualando exponentes:
$3m + 1 = 2m + 3$
$\therefore m = 2$

10 El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se las cuenta de 2 en 2 sobra una, de 3 en 3 sobran dos, de 5 en 5 sobran cuatro y de 7 en 7 sobran 6. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Resolución:
Sea N el número de páginas, entonces:

$N = \overset{\circ}{2} + 1 = \overset{\circ}{2} - 1$

$N = \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1$

$N = \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1$

$N = \overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} - 1$

$\Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{\overline{MCM(2; 3; 5; 7)}}$

$N + 1 = \overset{\circ}{210} \Rightarrow N = 210k - 1$

Del enunciado:
$400 < N < 500$
$400 < 210k - 1 < 500$
$1{,}95 < k < 2{,}39 \Rightarrow k = 2$

$N = 210(2) - 1 = 419$

Por lo tanto, el libro tiene 419 páginas.

11 Calcula dos números enteros sabiendo que su suma es 341 y su MCM es 28 veces su MCD.

Resolución:
Sean A y B los números:
$\Rightarrow MCD(A; B) = x$
$MCM(A; B) = y$

Luego: $A + B = 341$ ... (1)
$y = 28x$ ... (2)

Se sabe que:
$\left.\begin{array}{l} A = x \,.\, n_1 \\ B = x \,.\, n_2 \end{array}\right\}$ ... (3)

Como: A . B = MCD(A; B)MCM(A; B)
Luego: $A \,.\, B = x^2 \,.\, n_1 \,.\, n_2 = xy$
De (2): $x^2 \,.\, n_1 \,.\, n_2 = x(28x)$

$\Rightarrow n_1 \,.\, n_2 = 28 \left\{\begin{array}{ll} n_1 = 4;\ n_2 = 7 & \text{... }(\alpha) \\ n_1 = 1;\ n_2 = 28 & \text{... }(\beta) \end{array}\right.$

De (1) y (3): $A + B = x(n_1 + n_2) = 341 = 31 \,.\, 11$ ... (4)

Se observa que los valores en la ecuación (α) cumplen la ecuación (4), luego en (4):
$A + B = x(4 + 7) = 341$
$x = 31$
En (3):
$\Rightarrow A = 31 \times 4 = 124$
$B = 31 \times 7 = 217$

12 Tres cuerpos empiezan a girar simultáneamente alrededor de sus ejes centroidales a razón de $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{5}$ y $\frac{\pi}{8}$ radianes por segundo. Luego de 20 minutos, ¿cuántas veces han pasado simultáneamente por la posición inicial?

Resolución:
Hallamos la velocidad en que los cuerpos tardan en dar una vuelta (2π):

$\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ s $\qquad \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$ s $\qquad \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = 16$ s

Entonces, simultáneamente darán una vuelta en:
MCM(6; 10; 16) = 240 segundos

Luego, en 20 minutos, han pasado $\dfrac{20 \times 60}{240} = 5$ veces simultáneamente por la posición inicial.

◆ RAZONES Y PROPORCIONES

A

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades mediante una operación aritmética (sustracción o división).

Clases de razón

Razón aritmética	Razón geométrica
Es la comparación de dos cantidades a y b, mediante la sustracción. $a - b = r$ Donde: a: antecedente b: consecuente r: valor de la razón aritmética. Veamos un ejemplo: • Si Marco tiene 24 años y Carmen 10 años, comparando las edades: $24 - 10 = 14$ Interpretación: Marco es mayor que Carmen en 14 años.	Es la comparación de dos cantidades a y b, mediante la división. $\frac{a}{b} = k$ Donde: a: antecedente b: consecuente k: valor de la razón geométrica. Veamos un ejemplo: • Si Lalo tiene 25 camisas y José, 15; comparando las cantidades: $\frac{25}{15} = \frac{5}{3}$ Interpretación: La cantidad de camisas de Lalo y José están en la relación de 5 a 3.

Serie de razones geométricas equivalentes (S.R.G.E.)

Se llama así al conjunto de razones geométricas que tiene el mismo valor de la razón.

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Donde:

$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$: antecedentes

$b_1; b_2; b_3; \ldots; b_n$: consecuentes

k: constante de proporcionalidad

Propiedades:

1. $a_1 = b_1k;\ a_2 = b_2k;\ a_3 = b_3k;\ \ldots;\ a_n = b_nk$

   Por ejemplo: si $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = k \Rightarrow a = 3k \wedge b = 4k$

2. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n} = k$

   Por ejemplo: si $\frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{9} = 4$, entonces a + b + c será:

   $\Rightarrow \frac{a+b+c}{\underbrace{3+6+9}_{18}} = 4 \Rightarrow a + b + c = 72$

3. $\frac{a_1.a_2.a_3 \ldots a_n}{b_1.b_2.b_3 \ldots b_n} = k^n$

   Por ejemplo: si $\frac{a}{4} = \frac{b}{8} = \frac{c}{18} = \frac{1}{2}$, calcula abc.

   $\frac{a.b.c}{4.8.18} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Rightarrow abc = 72$

Nota

INTERPRETACIÓN DE UNA RAZÓN ARITMÉTICA

Por ejemplo sean:
E: edad de Elmer (28 años).
V: edad de Victor (30 años)
Luego comparando:

$30 - 28 = 2$

- Victor es mayor que Elmer en 2 años.
- Victor tiene 2 años más que Elmer.
- La razón aritmética de las edades de Victor y Elmer tiene por valor 2.

Nota

INTERPRETACIÓN DE UNA RAZÓN GEOMÉTRICA

Por ejemplo, sean:
A: n.º cuadernos (15)
B: n.º libros (10)
Luego, comparando:

$\frac{15}{10} = \boxed{\frac{3}{2}}$

- El n.º cuadernos y el n.º libros son entre sí como 3 es a 2.
- El n.º cuadernos y el n.º libros están en la relación de 3 a 2.
- La razón entre las cantidades de cuadernos y libros es de 3 a 2.

Atención

TEN PRESENTE QUE a la razón geométrica se le llama simplemente razón o relación.

Serie de razones geométricas equivalentes continuas (S.R.G.E.C.)

Es aquella sucesión de varias razones geométricas equivalentes donde el primer consecuente es igual al segundo antecedente, el segundo consecuente es igual al tercer antecedente y así sucesivamente.

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\frac{a_3}{a_4}=...=\frac{a_n}{a_{n+1}}=k$$

Por ejemplo:

$$\frac{135}{45}=\frac{45}{15}=\frac{15}{5}=3$$

Observación

Notamos que en la proporción aritmética continua (P.A.C):

$a-b=b-c$

$\Rightarrow b=\frac{a+c}{2}$

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones del mismo tipo (aritmética o geométrica).

Clases de proporción

Proporción aritmética	Proporción geométrica
Es la igualdad de dos razones aritméticas. Términos medios (b y c) $a-b=c-d$ Términos extremos (a y d) Veamos un ejemplo: Si 50 excede a 30 tanto como 45 excede a 25, se escribe: $\underbrace{50-30}_{20}=\underbrace{45-25}_{20}$ **Propiedad:** $\underbrace{a+d}=\underbrace{b+c}$ Suma de términos extremos = Suma de términos medios	Es la igualdad de dos razones geométricas. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Donde: a y d: términos extremos b y c: términos medios Veamos un ejemplo: Si 8 es a 2 como 12 es a 3, se escribe: $\frac{8}{2}=\frac{12}{3}$ **Propiedad:** $\underbrace{a\times d}=\underbrace{b\times c}$ Producto de términos extremos = Producto de términos medios

Observación

Notamos que en la proporción geométrica continua (P.G.C.):

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\Rightarrow b=\sqrt{a\times c}$

Clasificación de las proporciones según sus términos

	Proporción aritmética	Proporción geométrica
Discreta Posee términos medios diferentes.	$a-b=c-d$ d: cuarta diferencial de a; b y c.	$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ d: cuarta proporcional de a; b y c.
Continua Posee términos medios iguales.	$a-b=b-c$ b: media diferencial de a y c c: tercera diferencial de a y b.	$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ b: media proporcional de a y c. c: tercera proporcional de a y b.

Nota

Aplicación

EN LA PROPORCIÓN ARITMÉTICA:

$13-9=9-5$

9 es media diferencial de 13 y 5.

5 es tercera diferencial de 13 y 9.

ADEMÁS, EN LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA:

$\frac{2}{8}=\frac{8}{32}$

8 es media proporcional de 2 y 32.

32 es tercera proporcional de 2 y 8.

Propiedades de una proporción geométrica

Sea la proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$

Algunas propiedades son:

1. $\frac{a+c}{b+d}=\frac{a-c}{b-d}=k$
2. $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$
3. $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$
4. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}=\frac{k+1}{k-1}$

Problemas resueltos

1 A una fiesta asisten 180 personas entre hombres y mujeres. Por cada 5 mujeres hay 4 hombres. Si se retiran 20 parejas, ¿cuál es la razón entre el número de mujeres y el número de hombres que quedan en la fiesta?

Resolución:

$\frac{M}{H} = \frac{5k}{4k}$

$\Rightarrow M = 5k \wedge H = 4K$

Dato:

$5k + 4k = 180$

$k = 20$

Nuevo número de personas:

$\frac{M'}{H'} = \frac{5(20) - 20}{4(20) - 20}$

$\frac{M'}{H'} = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}$

2 Dos números cuya suma es 65, guardan una relación geométrica. Si se añade 17 al menor y se quita 17 al mayor, la relación geométrica inicial, se invierte. Halla los números.

Resolución:

Sean: a y b (a > b) los números.

$\Rightarrow a + b = 65$ ...(I)

Además: $\frac{a-17}{b+17} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{(a-17)+(b+17)}{b+17} = \frac{b+a}{a}$

$\Rightarrow a - b = 17$ ...(II)

De (I) y (II): $a = 41 \wedge b = 24$

3 Sabiendo que:

M: media diferencial de 5 y 1.

N: tercera proporcional de 1 y 2.

P: media proporcional de 3 y 75.

y $\frac{M}{N} = \frac{P}{Q}$. Calcula Q.

Resolución:

Del enunciado:

- $5 - M = M - 1 \Rightarrow 2M = 6$
  $M = 3$
- $\frac{1}{2} = \frac{2}{N} \Rightarrow N = 2 . 2$
  $N = 4$
- $\frac{3}{P} = \frac{P}{75} \Rightarrow P^2 = 3 . 75 = 225$
  $P = 15$

Luego: $\frac{3}{4} = \frac{15}{Q} \Rightarrow 3Q = 4.15$

$\therefore Q = 20$

4 Si se sabe que:

$\frac{p}{h} = \frac{q}{l} = \frac{r}{m} = \frac{s}{n}$ y

$(p + q + r + s)(h + l + m + n) = 6724$

Calcula el valor numérico de la expresión:

$E = \frac{1}{2}\left(\sqrt{ph} + \sqrt{ql} + \sqrt{sn} + \sqrt{mr}\right)$

Resolución:

Se sabe que:

$\frac{p}{h} = \frac{q}{l} = \frac{r}{m} = \frac{s}{n} = k$

Entonces: $p = hk$; $q = lk$; $r = mk$; $s = nk$

Luego:

$(hk + lk + mk + nk)(h + l + m + n) = 6724$

$k(h + l + m + n)^2 = 82^2$

$\sqrt{k}\,(h + l + m + n) = 82$

Finalmente:

$E = \frac{1}{2}\left(\sqrt{hk(h)} + \sqrt{lk(l)} + \sqrt{mk(m)} + \sqrt{nk(n)}\right)$

$E = \frac{1}{2}\sqrt{k}\,(h+l+m+n)$

$E = \frac{1}{2} . 82$

$E = 41$

5 En una fiesta hay 100 personas. Si por cada 2 varones hay 8 mujeres, y por cada 2 que están bailando 3 no bailan. ¿Cuántos varones no están bailando?

Resolución:

V: 2k

M: 8k

$\Rightarrow 8k + 2k = 100 \Rightarrow k = 10$

$\Rightarrow V = 20 \wedge M = 80$

Sean x varones y x mujeres los que bailan:

$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{20 - x + 80 - x}{3}$

$\Rightarrow 3x = 100 - 2x$, de donde: $x = 26$

$\therefore 20 - 20 = 0$ (es decir todos los varones están bailando)

6 La suma, diferencia y el producto de dos números están en la misma relación que 5; 2 y 21. Halla estos números.

Resolución:

$\frac{A+B}{5} = \frac{A-B}{2} = \frac{AB}{21}$

Por propiedad:

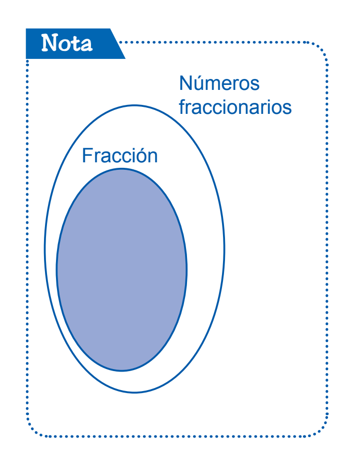
$\frac{(A+B)+(A-B)}{5+2} = \frac{AB}{21} \Rightarrow \frac{2A}{7} = \frac{AB}{21} \Rightarrow B = 6$

Luego:

$\frac{(A+B)-(A-B)}{5-2} = \frac{AB}{21} \Rightarrow \frac{2B}{3} = \frac{AB}{21} \Rightarrow A = 14$

$\therefore$ Los números son 6 y 14.

FRACCIONES



CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales está determinado por:

$$Q = \{x/x = \frac{a}{b}, \forall\, a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$$

Algunos ejemplos de números racionales son: $\frac{2}{5}; \frac{7}{3}; \frac{-4}{7}; \frac{2}{-11}$; etc.

Números fraccionarios. Son aquellos números racionales que no son enteros.
Veamos algunos ejemplos:

$\underbrace{\frac{1}{7}; \frac{4}{3}; \frac{-7}{9}}$ Son números fraccionarios

$\underbrace{\frac{12}{3}; \frac{-15}{5}; \frac{18}{-2}}$ No son números fraccionarios

FRACCIÓN

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son números enteros positivos.

$\underbrace{\frac{4}{7}; \frac{11}{3}; \frac{8}{15}}$ Son fracciones

$\underbrace{\frac{-5}{-2}; \frac{-7}{3}; \frac{4}{-5}}$ No son fracciones

Si F es fracción:

$F = \frac{A}{B}$ $\begin{array}{l} \rightarrow \text{Numerador} \\ \rightarrow \text{Denominador} \end{array}$

Donde: $A; B \in \mathbb{Z}^+ \wedge A \neq \overset{\circ}{B}$

Clasificación de las fracciones

Sea la fracción: $\frac{A}{B}$

1. Por la comparación de su valor respecto a la unidad

Propia	Impropia
$\frac{A}{B} < 1 \Rightarrow A < B$	$\frac{A}{B} > 1 \Rightarrow A > B$
$\frac{3}{5}; \frac{4}{11}; \frac{7}{9}; \frac{2}{3}$	$\frac{11}{3}; \frac{7}{5}; \frac{8}{3}; \frac{13}{2}$

2. Por su denominador

Decimal	Ordinaria
$B = 10^k, k \in \mathbb{Z}^+$	$B \neq 10^k, k \in \mathbb{Z}^+$
$\frac{2}{10}; \frac{7}{10^2}; \frac{13}{10^3}; \frac{21}{10^4}$	$\frac{2}{3}; \frac{17}{4}; \frac{5}{21}; \frac{12}{53}$

3. Por la cantidad de divisores comunes de sus términos

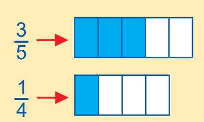
Irreductible	Reductible
Si A y B son PESÍ.	Si A y B no son PESÍ.
$\frac{7}{13}; \frac{15}{8}; \frac{17}{9}; \frac{23}{35}$	$\frac{8}{12}; \frac{14}{26}; \frac{21}{15}; \frac{24}{16}$

Atención

¿Qué significa la fracción $\frac{a}{b}$?

- El denominador indica las partes iguales en que se divide la unidad (o el todo).
- El numerador representa las partes de la unidad que se toman o consideran.

Gráficamente:



Atención

Ten en cuenta que una fracción impropia también se puede expresar del siguiente modo:

$\frac{13}{5} = \underbrace{2\frac{3}{5}}$, porque $\begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$

Fracción mixta

$\frac{25}{7} = \underbrace{3\frac{4}{7}}$, porque $\begin{array}{r|l} 25 & 7 \\ \hline 4 & 3 \end{array}$

Fracción mixta

4. Por grupo de fracciones

Homogénea	Heterogénea
Todas las fracciones tienen igual denominador.	Al menos un denominador es distinto a los demás.
$\frac{2}{13};\frac{7}{13};\frac{9}{13};\frac{17}{13}$	$\frac{12}{19};\frac{4}{19};\frac{7}{19};\frac{5}{12}$

OPERACIONES CON FRACCIONES

1. Adición y sustracción

Veamos algunos ejemplos:

- $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}-\frac{1}{5}=\frac{2+6-1}{5}=\frac{7}{5}$
- $\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{1}{2}}=\frac{2.10+4.6+1.15}{30}=\frac{59}{30}$

  MCM (3; 5; 2) = 30

2. Multiplicación

- $\frac{13}{4}\times\frac{8}{5}=\frac{13\times 8}{4\times 5}=\frac{26}{5}$
- $\frac{7}{3}\times 6=\frac{7}{3}\times\frac{6}{1}=\frac{7\times 6}{3\times 1}=14$

3. División

- $\frac{36}{45}\div 9=\frac{36}{45}\div\frac{9}{1}=\frac{36}{45}\times\frac{1}{9}=\frac{36\times 1}{45\times 9}=\frac{4}{45}$
- $\frac{50}{61}\div\frac{25}{183}=\frac{50}{61}\times\frac{183}{25}=\frac{50\times 183}{61\times 25}=6$

COMPARACIÓN DE FRACCIONES

1. Dado un grupo de fracciones homogéneas: **será mayor aquella que tenga mayor numerador.**

   Veamos un ejemplo:

   - Sean las fracciones: $\frac{7}{15};\frac{9}{15};\frac{5}{15};\frac{21}{15}$ ⇒ al ordenarlas de menor a mayor tenemos: $\frac{5}{15};\frac{7}{15};\frac{9}{15};\frac{21}{15}$

2. Si se tiene un grupo de fracciones de igual numerador: **es mayor la fracción que posee menor denominador.**

   Veamos un ejemplo:

   - Sean las fracciones: $\frac{41}{9};\frac{41}{11};\frac{41}{5};\frac{41}{12}$ ⇒ al ordenarlas de menor a mayor tenemos: $\frac{41}{12};\frac{41}{11};\frac{41}{9};\frac{41}{5}$

3. Para dos fracciones realizaremos el producto en aspa: **es mayor la fracción que posee el mayor producto.**

   Veamos un ejemplo:

   Dadas las fracciones: $\frac{2}{3}$ y $\frac{5}{7}$, hacemos el procedimiento en aspa:

   $$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \Rightarrow \underbrace{2\times 7}_{14} < \underbrace{3\times 5}_{15} \Rightarrow \frac{2}{3}<\frac{5}{7}$$

Propiedades

1. Dadas las fracciones irreductibles: $f_1=\frac{a}{b}$ y $f_2=\frac{c}{d}$

   Si se cumple: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=e \ \wedge \ e\in\mathbb{Z}\Rightarrow b=d$

2. Sean las fracciones irreductibles: $\frac{a}{b};\frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, se cumple:

   $$\text{MCD}\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCD}(a;c;e)}{\text{MCM}(b;d;f)}$$

   $$\text{MCM}\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCM}(a;c;e)}{\text{MCD}(b;d;f)}$$

Observación

A partir de una fracción irreductible se puede obtener fracciones equivalentes a ella.

$\frac{2}{3}\approx\frac{4}{6}\approx\frac{6}{9}\approx ...\approx\frac{2n}{3n}; n\in\mathbb{Z}^+$

$\frac{5}{9}\approx\frac{10}{18}\approx\frac{15}{27}\approx ...\approx\frac{5m}{9m}; m\in\mathbb{Z}^+$

Atención

TEN PRESENTE...
Que para comparar fracciones heterogéneas con distintos numeradores, se deben comparar las fracciones de 2 en 2.

Veamos un ejemplo:

Sean las fracciones:

$\frac{6}{7};\frac{1}{5}$ y $\frac{3}{4}$

- $\frac{6}{7}>\frac{1}{5}$ porque 6 × 5 > 7 × 1
  30 > 7
- $\frac{6}{7}>\frac{3}{4}$ porque 6 × 4 > 7 × 3
  24 > 21
- $\frac{1}{5}<\frac{3}{4}$ porque 1 × 4 < 5 × 3
  4 < 15

Luego, ordenando de manera creciente, tenemos:

$\frac{1}{5}<\frac{3}{4}<\frac{6}{7}$

Recuerda

PRIMERA REGLA
En un **número decimal exacto** la cantidad de cifras decimales está dada por el mayor exponente de 2 y/o 5.

Veamos un ejemplo:

- $\dfrac{3}{160} = 0,\underbrace{01875}_{5\ \text{cifras}}$

  $160 = 2^{⑤} \times 5^1$ → Mayor exponente

Recuerda

SEGUNDA REGLA
En un **número periódico puro** el número de cifras del periodo está dado por la cantidad de cifras del menor número formado por las cifras 9, que contienen como factor al denominador de la fracción generatriz.

- $\dfrac{7}{11} = 0,\underbrace{\widehat{63}}_{2\ \text{cifras}}$

  11 es factor de 99.

- $\dfrac{1}{7} = 0,\underbrace{\widehat{142857}}_{6\ \text{cifras}}$

  7 es factor de 999 999.

Recuerda

TERCERA REGLA
En un número periódico mixto tenemos:

$0,\overline{ab\ldots x}\,\widehat{\alpha\beta\ldots\omega}$

El n.º de cifras está dado por la primera regla. | El n.º de cifras está dado por la segunda regla.

NÚMEROS DECIMALES

Es la representación lineal de las fracciones en base 10. Por ejemplo:

- $\dfrac{1}{2} = 0,5$
- $\dfrac{1}{6} = 0,166...$
- $\dfrac{5}{4} = 1,25$
- $\dfrac{1}{8} = 0,125$
- $\dfrac{1}{3} = 0,333...$
- $\dfrac{71}{300} = 0,2366...$

Clasificación de los números decimales

A) Número decimal exacto. Una fracción irreductible genera un número decimal exacto, cuando el denominador tenga como únicos divisores primos al 2 y/o al 5.

Veamos algunos ejemplos:

- $\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2^{②}} = 0,\underbrace{75}_{2\ \text{cifras}}$
- $\dfrac{17}{125} = \dfrac{17}{5^{③}} = 0,\underbrace{136}_{3\ \text{cifras}}$
- $\dfrac{11}{40} = \dfrac{11}{2^{③} \times 5} = 0,\underbrace{275}_{3\ \text{cifras}}$
- $\dfrac{7}{5000} = \dfrac{7}{2^3 \times 5^{④}} = 0,\underbrace{0014}_{4\ \text{cifras}}$

Fracción generatriz

Ejemplos:

- $0,18 = \dfrac{18}{100} = \dfrac{9}{50}$
- $0,275 = \dfrac{275}{1000} = \dfrac{11}{40}$

En general:

$$0,\underbrace{abc\ldots x}_{k\ \text{cifras}} = \frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{100\ldots00}_{k\ \text{ceros}}}$$

B) Número decimal inexacto

1. Periódico puro. Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico puro, cuando su denominador no tenga como divisores primos a 2 ni a 5.

Veamos algunos ejemplos:

- $\dfrac{1}{3} = 0,333... = 0,\widehat{3}$
- $\dfrac{7}{11} = 0,636363... = 0,\widehat{63}$
- $\dfrac{5}{101} = 0,04950495... = 0,\widehat{0495}$
- $\dfrac{1}{7} = 0,142857142857 = 0,\widehat{142857}$

Fracción generatriz

Ejemplos:

- $0,\widehat{21} = \dfrac{21}{99} = \dfrac{7}{33}$
- $0,\widehat{117} = \dfrac{117}{999} = \dfrac{13}{111}$

En general:

$$0,\underbrace{\widehat{abc\ldots x}}_{k\ \text{cifras}} = \frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{999\ldots9}_{k\ \text{cifras}}}$$

Recuerda la siguiente tabla:
$9 = 3^2$
$99 = 3^2 \times 11$
$999 = 3^3 \times 37$
$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$
$99\,999 = 3^2 \times 41 \times 271$
$999\,999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

2. Periódico mixto. Una fracción irreductible genera un número decimal inexacto periódico mixto, cuando el denominador tiene como divisores primos al 2 y/o al 5, y además a otros factores primos.

Ejemplos:

- $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{2 \times 3} = 0,1666... = 0,1\widehat{6}$
- $\dfrac{17}{220} = \dfrac{17}{2^2 \times 5^1 \times 11} = 0,07727272... = 0,07\widehat{72}$

Notamos que en el denominador ponemos tantos nueves como cifras tenga la parte periódica y tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica.

Fracción generatriz

Ejemplos:

- $0,2\overset{\frown}{15} = \dfrac{215-2}{990} = \dfrac{71}{330}$
- $0,21\overset{\frown}{567} = \dfrac{21\,567-21}{99\,900} = \dfrac{1197}{5550}$

En general:

$$0,\overline{ab}\,\overset{\frown}{xyz} = \frac{\overline{abxyz}-\overline{ab}}{99\,900}$$

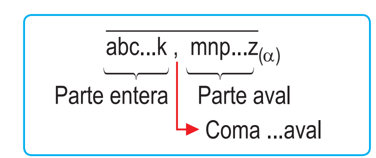
NÚMEROS AVALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción en un determinado sistema de numeración.

Por ejemplo:

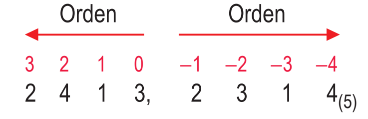
- $\dfrac{145}{8} = 18,125 \longrightarrow$ decimal
- $\dfrac{83}{6} = \dfrac{215_{(6)}}{10_{(6)}} = 21,5_{(6)}$ → exaval
- $\dfrac{76}{25} = \dfrac{301_{(5)}}{100_{(5)}} = 3,01_{(5)}$ → Pentaval
- $\dfrac{86}{24} = \dfrac{321_{(5)}}{44_{(5)}} = 3,21_{(5)}$
- $\dfrac{27}{35} = \dfrac{43_{(6)}}{55_{(6)}} = 0,43_{(6)}$
- $\dfrac{86}{63} = \dfrac{126_{(8)}}{77_{(8)}} = 1,26_{(8)}$

Todo número aval presenta dos partes: una parte entera y otra parte aval.



El orden de los números avales

Sea el numeral $2413,2314_{(5)}$, indicamos el orden de la parte entera y de la parte aval.



Descomposición polinómica de números avales

- $2413,2314_{(5)} = 2\times5^3+4\times5^2+1\times5^1+3\times5^0+2\times5^{-1}+3\times5^{-2}+1\times5^{-3}+4\times5^{-4}$
  $= 2\times5^3+4\times5^2+1\times5+3+\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{5^2}+\dfrac{1}{5^3}+\dfrac{4}{5^4}$
- $0,1534_{(7)} = \dfrac{1}{7}+\dfrac{5}{7^2}+\dfrac{3}{7^3}+\dfrac{4}{7^4}$

Propiedad:

Si $0,\overline{abcd}_{(n)} = 0,\overline{pqrs}_{(m)} \wedge \overline{abcd} > \overline{pqrs}$; entonces $n > m$

Veamos un ejemplo:

Si $0,\overset{\frown}{mn}_{(3)} = 0,\overset{\frown}{pn}_{(5)}$, calcula: $m+n+p$

Resolución:

Hallamos la fracción generatriz:

$$\frac{\overline{mn}_{(3)}}{22_{(3)}} = \frac{\overline{pn}_{(5)}}{44_{(5)}} \Rightarrow \frac{3m+n}{8} = \frac{5p+n}{24}$$

$3(3m+n) = 5p+n$

$9m+3n = 5p+n$

$9m+2n = 5p$

↓ ↓ ↓

2 1 4

$\therefore m+n+p = 2+1+4 = 7$

Importante

FRACCIÓN GENERATRIZ

De los números avales, en general:

- $0,\underbrace{\overline{abc...x}}_{k\text{ cifras}}{}_{(n)} = \dfrac{\overline{abc...x}_{(n)}}{\underbrace{1000...0}_{k\text{ ceros}}{}_{(n)}}$
- $0,\underbrace{\overset{\frown}{abcx}}_{k\text{ cifras}}{}_{(n)} = \dfrac{\overline{abc...x}_{(n)}}{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}}_{k\text{ cifras}}{}_{(n)}}$
- $0,\underbrace{\overline{abc...x}}_{k\text{ cifras}}\underbrace{\overset{\frown}{\alpha\beta...\omega}}_{m\text{ cifras}}{}_{(n)} = \dfrac{\overline{ab...x\alpha\beta...\omega}_{(n)}-\overline{abc...x}_{(n)}}{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}}_{m\text{ cifras}}\underbrace{00...0}_{k\text{ cifras}}{}_{(n)}}$

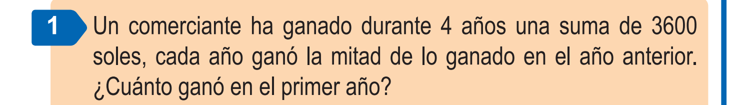
Veamos algunos ejemplos:

$0,21_{(3)} = \dfrac{21_{(3)}}{100_{(3)}} = \dfrac{7}{9}$

$0,\hat{2}_{(6)} = \dfrac{2_{(6)}}{5_{(6)}} = \dfrac{2}{5}$

$0,3\overset{\frown}{21}_{(4)} = \dfrac{321_{(4)}-3_{(4)}}{330_{(4)}} = \dfrac{9}{10}$

Problemas resueltos



1 Un comerciante ha ganado durante 4 años una suma de 3600 soles, cada año ganó la mitad de lo ganado en el año anterior. ¿Cuánto ganó en el primer año?

Resolución:

Sea: x lo que ganó el primer año.

Segundo año: $\frac{1}{2}x$

Tercer año ganó: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{4}x$

Cuarto año ganó: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{8}x$

Luego: $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x = 3600$

Operando, tenemos: $\frac{8x + 4x + 2x + x}{8} = 3600$

$$15x = 3600(8)$$

$$\therefore\ x = 1920$$

Por lo tanto, ganó 1920 soles el primer año.

2 Halla la diferencia de A y B, si A es igual a los 3/5 de los 4/9 de 60 y B es igual a los 7/8 de los 3/14 de los 4/3 de 4.

Resolución:

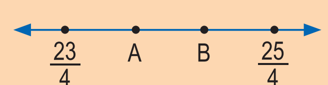
$A = \frac{3}{5} \times \frac{4}{9} \times 60 \Rightarrow A = 1 \times \frac{4}{3} \times 12 = 16$

$B = \frac{7}{8} \times \frac{3}{14} \times \frac{4}{3} \times 4 \Rightarrow B = \frac{7 \times 16}{8 \times 14}$

$$B = \frac{1 \times 2}{1 \times 2} = 1$$

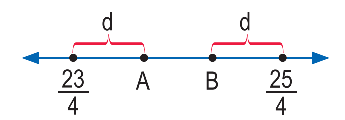
Luego: $A - B = 16 - 1 = 15$

3 Halla la suma de las fracciones que corresponden a los puntos A y B en la siguiente recta numérica:



A y B equidistan de los extremos entre sí.

Resolución:



Del gráfico:

$d = A - \frac{23}{4}$ $\qquad$ $d = \frac{25}{4} - B$

Igualamos:

$A - \frac{23}{4} = \frac{25}{4} - B \Rightarrow A + B = \frac{25}{4} + \frac{23}{4} = 12$

4 Si: $N = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + ...,$

es irreductible, determina la suma de sus términos.

Resolución:

Multiplicamos por 49:

$$49N = 7 + 2 + \underbrace{\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + ...}_{N}$$

De donde:

$48N = 9 \Rightarrow N = \frac{9}{48} \Rightarrow N = \frac{3}{16}$

$\therefore$ Suma de términos: 19

5 Halla el valor de b, si se cumple que:

$\frac{a}{11} + \frac{b}{9} = 0,\overparen{(a+1)(a+b)}$

Resolución:

$$\frac{a}{11} + \frac{b}{9} = \frac{\overline{(a+1)(a+b)}}{99}$$

$$\frac{9a + 11b}{99} = \frac{\overline{(a+1)(a+b)}}{99}$$

$$9a + 11b = 10(a + 1) + (a + b)$$

$$10b = 2a + 10$$

$$5b = a + 5$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 \quad 5$$

Entonces, el valor de b es: b = 2.

6 Si se cumple que:

$0,\overparen{a1} + 0,\overparen{a2} + 0,\overparen{a3} = 1,\overparen{27}$

Calcula: a^2

Resolución:

$0,\overparen{a1} + 0,\overparen{a2} + 0,\overparen{a3} = 1,\overparen{27}$

$$\frac{\overline{a1}}{99} + \frac{\overline{a2}}{99} + \frac{\overline{a3}}{99} = \frac{127 - 1}{99}$$

$$\overline{a1} + \overline{a2} + \overline{a3} = 126$$

$$30a + 6 = 126$$

$$30a = 120$$

$$a = 4$$

$\therefore\ a^2 = 16$

7 Si se cumple:

$\frac{0,\overparen{ab}}{0,\overparen{ba}} = 1,\overparen{72}$

Calcula (a + b), si además: a − b = 1

Resolución:
Hallamos la fracción generatriz:

$$\frac{0,\widehat{ab}}{0,\widehat{ba}} = 1,\widehat{72}$$

$$\frac{\frac{\overline{ab}-a}{90}}{\frac{\overline{ba}-b}{90}} = \frac{172-1}{99} \Rightarrow \frac{\overline{ab}-a}{\overline{ba}-b} = \frac{171}{99} = \frac{19}{11}$$

$$\frac{9a+b}{9b+a} = \frac{19}{11}$$

$$a = 2b$$

Tenemos como dato:
$a - b = 1$

Entonces:
$a = 2 \wedge b = 1$
$\therefore\ a + b = 3$

8 Halla el menor valor entero que al agregarle y quitarle al numerador y denominador de la fracción generatriz de $0,\widehat{148}$; esta se convierta en fracción impropia.

Resolución:
Sabemos que:

$$0,\widehat{148} = \frac{148}{999} = \frac{74\times 2}{37\times 27} = \frac{4}{27}$$

Aumentamos y disminuimos **x** al numerador y denominador de la fracción generatriz:

$$\frac{4+x}{27-x} > 1$$

$$4 + x > 27 - x$$

$$2x > 23$$

$$x > 11,5 \Rightarrow x = 12$$

9 Halla a + b + c + d, sabiendo que:
$$\frac{a}{6}+\frac{b}{6^2}+\frac{c}{6^3}+\frac{d}{6^4} = \frac{153}{432}$$

Resolución:
Operamos la expresión:

$$\frac{a}{6}+\frac{b}{6^2}+\frac{c}{6^3}+\frac{d}{6^4} = \frac{153}{432}$$

$$\frac{6^3a+6^2b+6c+d}{6^4} = \frac{153}{432}$$

$$6^3a + 6^2b + 6c + d = 3\times 153$$

$$\overline{abcd}_{(6)} = 459$$

Ahora convirtiendo 459 a base 6, tenemos:

$459 = 2043_{(6)}$

Entonces:
$\overline{abcd}_{(6)} = 2043_{(6)}$

$\therefore\ a + b + c + d = 2 + 0 + 4 + 3 = 9$

10 ¿En qué sistema de numeración $\frac{1985}{2779}$ se expresa como $0,\widehat{41}$?

Resolución:
Sea la base del sistema de numeración n:

$$\frac{1985}{2779} = 0,\widehat{41}_{(n)}$$

Para reducir la fracción, calculamos el MCD:
MCD(1985; 2779) = 397

Luego:

$$\frac{397\times 5}{397\times 7} = 0,\widehat{41}_{(n)}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{41_{(n)}}{(n-1)(n-1)_{(n)}} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{4n+1}{n^2-1}$$

De donde: n = 6
Luego, el sistema que corresponde es el senario.

11 Halla la suma de las cifras diferentes de la parte decimal de:

$$f = \frac{7777}{3\times 41\times 271}$$

Resolución:

$$f = \frac{7777}{3\times 41\times 271}$$

Multiplicamos tanto el numerador y denominador por 3:

$$f = \frac{7777}{33\,333}\times\frac{3}{3}$$

Obtenemos la fracción generatriz de un decimal inexacto periódico puro:

$$f = \frac{23\,331}{99\,999}$$

$$f = 0,\widehat{23331}$$

Nos piden la suma de cifras diferentes de la parte decimal:
$2 + 3 + 1 = 6$

12 ¿Cuántas cifras tiene la parte no periódica de la fracción:
$f = \frac{800}{31!-21!}$?

Resolución:
$800 = 2^5 \times 5^2$

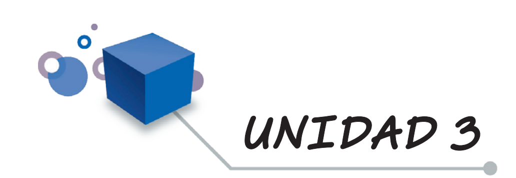
$31! - 21! = 21!\,(22\times 23 \ldots \times 31 - 1)$

$31! - 21! = 2^{18}\times 5^4 (A)$

En la fracción tenemos:

$$f = \frac{2^5\times 5^2}{2^{18}\times 5^4\times A} \Rightarrow f = \frac{1}{2^{18}\times 5^2\times A}$$

El número de cifras de la parte no periódica es el mayor exponente de 2 ó 5. En este caso es 18.



UNIDAD 3

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Atención

Magnitud	Cantidad
Temperatura	25 °C
Longitud	40 km
Tiempo	8 h
Rapidez	20 m/s

MAGNITUD

Se llama magnitud a toda cualidad susceptible de variar (aumentar o disminuir). Por ejemplo: la temperatura, la rapidez, el tiempo, etc.

Cantidad

Es la medida de la magnitud, llamada también valor instantáneo de una magnitud.

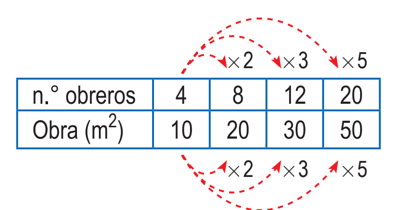
Relación entre magnitudes

Veamos algunos ejemplos de magnitudes que se relacionan: costo-producto; rapidez-tiempo; n.° obreros-obra, etc. Dos magnitudes se pueden relacionar de manera directa o inversamente proporcional.

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (DP)

Dos magnitudes son DP si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra también queda multiplicado por dicho número.

Veamos un ejemplo: n.° obreros-obra



n.° obreros	4	8	12	20
Obra (m^2)	10	20	30	50

Del recuadro se nota:

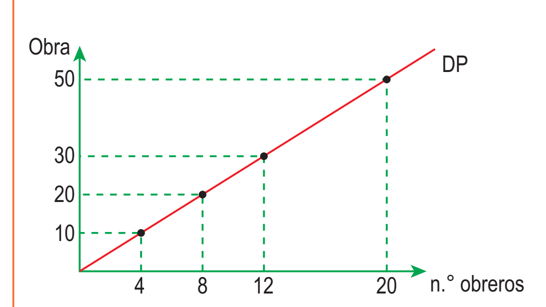
$$\frac{4}{10} = \frac{8}{20} = \frac{12}{30} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

Constante

Entonces:

$$\frac{\text{n.° obreros}}{\text{Obra}} = \text{Constante}$$

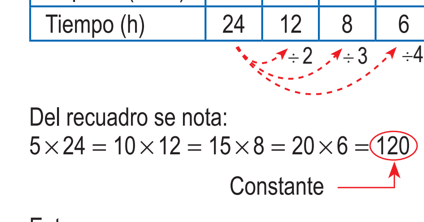
Representando los valores de las magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares, tenemos:



MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (IP)

Dos magnitudes son IP si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido por dicho valor.

Veamos un ejemplo: rapidez-tiempo



Rapidez (km/h)	5	10	15	20
Tiempo (h)	24	12	8	6

Del recuadro se nota:

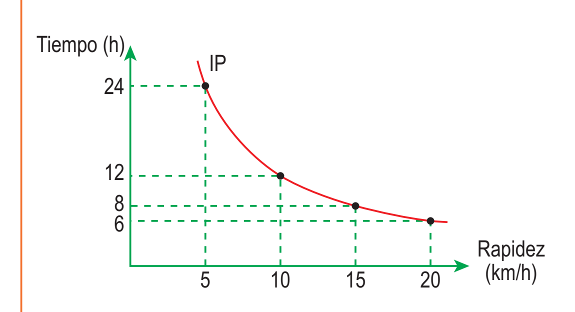
$$5 \times 24 = 10 \times 12 = 15 \times 8 = 20 \times 6 = 120$$

Constante

Entonces:

(Rapidez)(Tiempo) = Constante

Representando los valores de las magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares, tenemos:



Observaciones

- La gráfica de 2 magnitudes DP resultan ser puntos sobre una línea recta.
- La gráfica de 2 magnitudes IP resultan ser puntos sobre una rama de la hipérbola equilátera.

Sean A y B magnitudes:
Si A DP B, entonces:

$$\frac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = k$$

Si A IP B, entonces:

$$\left(\begin{matrix}\text{Valor}\\ \text{de A}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Valor}\\ \text{de B}\end{matrix}\right) = k$$

Donde:
k: constante

Propiedades

A DP B $\Leftrightarrow$ B DP A A IP B $\Leftrightarrow$ B IP A	A IP B $\Leftrightarrow$ A DP 1/B A DP B $\Leftrightarrow$ A IP 1/B

A DP B $\Leftrightarrow$ A^n DP B^n A IP B $\Leftrightarrow$ A^n IP B^n	$\left.\begin{array}{l}\text{A DP B}\\ \text{A IP C}\\ \text{A DP D}\end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{A\times C}{B\times D} = \text{cte.}$

REPARTO PROPORCIONAL

El reparto proporcional consiste en distribuir en función a ciertos criterios y restricciones, cantidades de dinero, objetos, elementos, incentivos, etc. Existen dos tipos de reparto proporcional.

Reparto simple

Se reparte en función a una sola restricción, puede ser directa o inversa.

Veamos algunos ejemplos:

Reparte S/.72 DP a 3 y 5.

$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = k \Rightarrow A = 3k \;\wedge\; B = 5k$

Además:

$A + B = 72$

$3k + 5k = 72$

$8k = 72 \Rightarrow k = 9$

Luego, las partes repartidas son:

$A = 27$ y $B = 45$

Reparte S/.72 IP a 3 y 5.

3A = 5B (dividiendo entre 15)

$\frac{A}{5} = \frac{B}{3} = m \Rightarrow A = 5m \;\wedge\; B = 3m$

$A + B = 72$

$5m + 3m = 72$

$8m = 72 \Rightarrow m = 9$

Luego, las partes repartidas son:

$A = 45$ y $B = 27$

Reparto compuesto

Se reparte considerando dos o más restricciones.

Veamos un ejemplo:

Reparte S/.316 en partes que sean DP a los números 3; 4 y 6, y a la vez IP a los números 5; 5 y 7.

Sean las partes repartidas A; B y C, luego:

$5\left(\frac{A}{3}\right) = 5\left(\frac{B}{4}\right) = 7\left(\frac{C}{6}\right) \Rightarrow$ (dividiendo entre MCM(5; 5; 7) = 35)

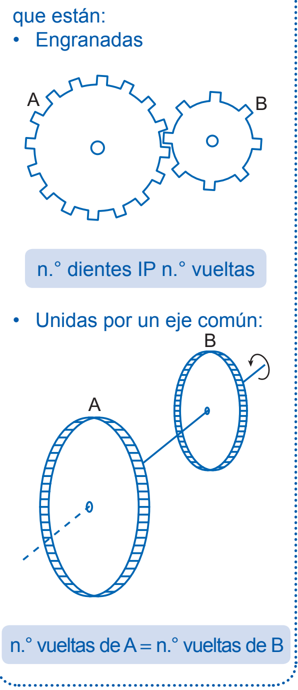
$\frac{A}{7\times 3} = \frac{B}{7\times 4} = \frac{C}{5\times 6} = k \Rightarrow A = 21k;\ B = 28k \wedge C = 30k$

Además: $A + B + C = 316$

$21k + 28k + 30k = 316$

$79k = 316 \Rightarrow k = 4$

Luego: $A = 84;\ B = 112 \;\wedge\; C = 120$



REGLA DE COMPAÑÍA

La regla de compañía tiene por objeto repartir entre varios socios los beneficios (ganancias) que han obtenido o las pérdidas que han sufrido en sus negocios.

Sean las magnitudes: capital, ganancia y tiempo, entonces:

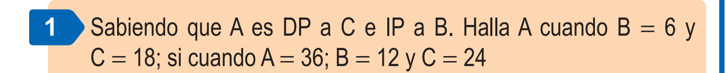
Ganancia DP Capital (tiempo constante)

Ganancia DP Tiempo (capital constante)

Luego:

$$\frac{\text{Ganancia}}{(\text{Capital})(\text{Tiempo})} = \text{constante}$$

Problemas resueltos



1 Sabiendo que A es DP a C e IP a B. Halla A cuando B = 6 y C = 18; si cuando A = 36; B = 12 y C = 24

Resolución:

Del enunciado: $\dfrac{A \times B}{C} = k$ (constante)

Igualando condiciones:

$\dfrac{A \times 6}{18} = \dfrac{36 \times 12}{24}$

$\therefore\ A = 54$

2 El sueldo de un obrero es proporcional al cuadrado de su edad. Si un obrero, que actualmente, tiene 20 años ha proyectado ganar S/.1200 dentro de 5 años, ¿cuánto gana actualmente?

Resolución:

Del enunciado:

	DP	
	Sueldo	$(\text{Edad})^2$
Actual:	x	$(20)^2$
Dentro de 5 años:	1200	$(25)^2$

Como son DP obtenemos:

$\dfrac{x}{(20)^2} = \dfrac{1200}{(25)^2} \Rightarrow x = 768$

Por lo tanto, actualmente su sueldo es S/.768.

3 Divide el número 15 540 en 3 partes que sean DP a 10^8; 10^9 y 10^{10}. Indica la parte mayor y da como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

DP ⇒ Números proporcionales

15 540
- $10^8 = 10^8 \cdot 1$ $1 \Rightarrow k$
- $10^9 = 10^8 \cdot 10$ $10 \Rightarrow 10k$
- $10^{10} = 10^8 \cdot 10^2$ $100 \Rightarrow 100k$

(+) $111k$

Luego:

$111k = 15\,540$

$k = 140$

Entonces, la parte mayor es:

$100(140) = 14\,000$

$\therefore \sum$ cifras = 5

4 En el siguiente cuadro se tiene a las magnitudes A y B relacionados mediante condiciones de proporcionalidad, determina el valor de x.

A	847	567	x
B	11	9	5

Resolución:

Se observa que: $\dfrac{A}{B^2} = k$ (constante)

Con lo cual: $\dfrac{847}{11^2} = \dfrac{567}{9^2} = \dfrac{x}{5^2} = 7$

Entonces:

$\dfrac{x}{25} = 7$

$\therefore\ x = 175$

5 Si: A DP B^2 (C: constante)

C IP A (B: constante)

A	80	a	25
B	10	2	10
C	40	2	b

Calcula: a + b.

Resolución:

Dado que:

A DP B^2 $\wedge$ A IP C $\Rightarrow \dfrac{A \times C}{B^2} = \text{cte}$

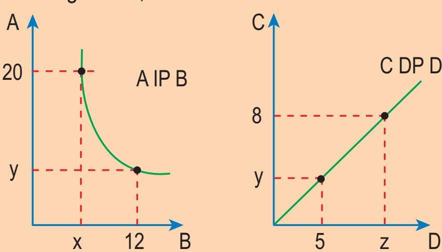
Reemplazando valores:

$\dfrac{80 \times 40}{100} = \dfrac{a \times 2}{4} = \dfrac{25 \times b}{100}$

$a = 64 \quad \wedge \quad b = 128$

$\therefore\ a + b = 192$

6 De las gráficas, calcula x.z:



Resolución:

Como A IP B ⇒ A . B = k_1

$\Rightarrow 20 \cdot x = 12 \cdot y \Rightarrow x = \dfrac{12}{20}y$

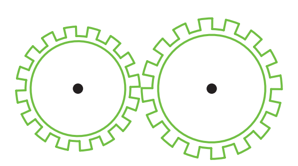
Como C DP D ⇒ $\dfrac{C}{D} = k_2$

$\dfrac{y}{5} = \dfrac{8}{z} \Rightarrow z = \dfrac{40}{y}$

$\therefore\ x \cdot z = \left(\dfrac{12}{20}y\right)\left(\dfrac{40}{y}\right) = 24$

7 Una rueda de 48 dientes da 560 rpm y engrana con un piñón que da 107 520 vueltas por hora. ¿Cuál es el número de dientes del piñón?

Resolución:



n.° $\text{dientes}_2 = x$ n.° $\text{dientes}_1 = 48$

Se cumple que:

$(n.°d_1)(n.°V_1) = (n.°d_2)(n.°v_2)$

$$48 \,.\, 560 = x \,.\left(\frac{107\,520}{60}\right)$$

$\therefore\ x = 15$

8 Al repartir un número en forma DP a tres números PESÍ, se obtiene las siguientes partes: 720; 1080 y 1800. Entonces la suma de los tres primos es:

Resolución:

Sean a, b y c (PESÍ) los números respecto a quienes se reparte.

$ak = 720 \quad bk = 1080 \quad ck = 1800$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{ak}{bk} = \dfrac{720}{1080} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{bk}{ck} = \dfrac{1080}{1800} \Rightarrow \dfrac{b}{c} = \dfrac{3}{5}\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 2\\ b = 3\\ c = 5\end{array}$$

$\therefore\ a + b + c = 10$

9 Se tienen 2 magnitudes A y B que son IP, cuando A aumenta 6 unidades, B varía un 20%. ¿Cómo varía B, cuando A disminuye en 4 unidades?

Resolución:

Como A IP B $\Rightarrow$ A . B = k(cte.)

Tenemos: $A_1 = a \quad A_2 = a + 6$

$B_1 = b \quad B_2 = b - 20\%b \Rightarrow B_2 = \frac{4}{5}b$

Reemplazando: $a \,.\, b = (a + 6) \,.\, \frac{4}{5}b$

$a = 24$

Hallamos la variación de B_1 cuando A disminuye 4 unidades:

$24 \,.\, b = 20 \,.\, x \Rightarrow x = \frac{24}{20}b$

En porcentaje: $x = 120\%b$

$\therefore$ B aumenta 20%.

10 Se divide un número en tres partes de modo que las raíces cúbicas de la primera y tercera parte son DP a 4 y 3, y los cuadrados de la primera y la segunda son DP a 4096 y 81. ¿Qué porcentaje del número que se repartió es la segunda parte?

Resolución:

Sean A; B y C las partes.

$$\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{C}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{A}{C} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{64}{27} \quad ...(1)$$

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{4096}{81} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{64}{9} \quad ...(2)$$

De (1) y (2), las partes son:

$A = 64k,\ B = 9k,\ C = 27k$

Total: $64k + 9k + 27k = 100k$

La parte B:

$$\frac{9k}{100k} \,.\, 100 = 9\%$$

$\therefore$ La parte B es el 9% del total.

11 Se reparte al número 145 800 en partes proporcionales a todos los números pares desde 10 a 98. ¿Cuánto le toca al que es proporcional a 72?

Resolución:

Se reparte: S = 145 800

DP
10
12
14
⋮
98

$$\Rightarrow k = \frac{145\,800}{2430} = 60$$

$$\frac{45(10 + 98)}{2} = 2430$$

Luego, al que es proporcional a 72 le toca: 72 . 60 = 4320.

12 Se reparten S/.6500 entre 3 personas, en forma directamente proporcional a los números a; a^2 y a^3. Si la menor cantidad recibida fue S/.500, ¿cuál fue la mayor? Suponer $a > 1$.

Resolución:

Se reparte: S/.6500

DP

$a \rightarrow 1$

$a^2 \rightarrow a$

$a^3 \rightarrow a^2$

Menor parte $= 1 \,.\, k = 500$

$k = 500$

Pero:

$$k = \frac{6500}{a^2 + a + 1} = 500$$

$a^2 + a + 1 = 13$

$a = 3$

La mayor parte es: $a^2k = 3^2 \,.\, 500 = 4500$

13 Una sociedad comercial ha emitido 1000 acciones de S/.100 cada una y tiempo después ha obtenido por dividendos S/.750 000. Si la empresa toma el 25% de esta cantidad para el fondo de reserva y reparte el resto entre los accionistas que son A (100 acciones), B (280 acciones), C (340 acciones) y D (el resto). ¿Cuánto recibe A por utilidad?

Resolución:

Del enunciado, tenemos que las utilidades son directamente proporcionales a las acciones de los poseedores.

Sean U_A; U_B; U_C y U_D las utilidades que reciben los accionistas A, B, C y D, respectivamente.

Entonces:

$$\frac{U_A}{100} = \frac{U_B}{280} = \frac{U_C}{360} = \frac{U_D}{260} = K(\text{cte.})$$

Luego: $U_A + U_B + U_C + U_D = 75\%(750\,000)$

$1000K = 562\,500$

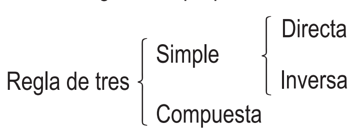
$K = 562{,}5$

Por lo tanto, A recibe por utilidad 100(562,5) = S/.56 250.

REGLA DE TRES

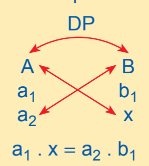
DEFINICIÓN

La regla de tres es un procedimiento aritmético que consiste en calcular un valor desconocido de una magnitud, mediante la comparación de dos o más magnitudes proporcionales.



Observación

Un método práctico para resolver una regla de tres simple directa es multiplicar en aspa.



$a_1 \cdot x = a_2 \cdot b_1$

REGLA DE TRES SIMPLE

Se genera cuando se comparan dos magnitudes. A su vez puede ser:

A) Regla de tres simple directa

Cuando las magnitudes que intervienen son directamente proporcionales (DP).

Esquema:

DP: A → B; a_1, b_1; a_2, x

Método de solución:

Como A DP B se cumple: $\frac{A}{B} = \text{cte.}$

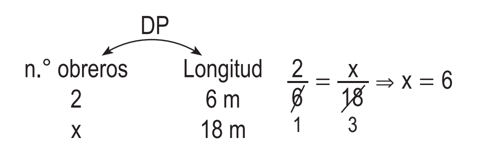
$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{x} \Rightarrow a_1.x = a_2.b_1$

$$x = \frac{a_2.b_1}{a_1}$$

Ejemplo:

Para hacer una zanja de 6 m de largo se necesitan 2 obreros. ¿Cuántos obreros se requieren para abrir otra zanja de 18 m de largo?

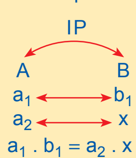
Resolución:



$\frac{2}{\not 6_1} = \frac{x}{\not{18}_3} \Rightarrow x = 6$

Atención

Un método práctico para resolver una regla de tres simple inversa es multiplicar en línea.

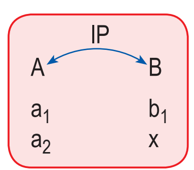


$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot x$

B) Regla de tres simple inversa

Cuando las magnitudes que intervienen son inversamente proporcionales (IP).

Esquema:



Método de solución:

Como A IP B se cumple: A . B = cte.

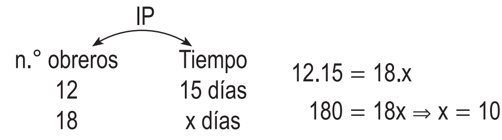
$a_1 \cdot b_1 = a_2 \cdot x$

$$x = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$$

Ejemplo:

12 obreros hacen una obra en 15 días. ¿En cuántos días 18 obreros harán la misma obra?

Resolución:



$12.15 = 18.x$

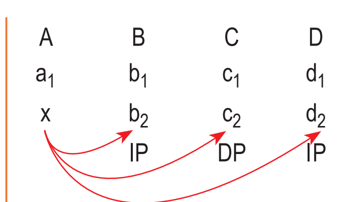
$180 = 18x \Rightarrow x = 10$

REGLA DE TRES COMPUESTA

Se genera cuando se comparan tres o más magnitudes. Para resolver problemas de este tipo podemos emplear los siguientes métodos.

I. Método de comparación

Se disponen los datos de manera que los valores pertenecientes a una misma magnitud estén en una misma columna. Se compara la magnitud donde se encuentra la incógnita y las demás magnitudes.



Entonces:

$$x = a_1\left(\frac{b_1}{b_2}\right)\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\left(\frac{d_1}{d_2}\right)$$

II. Método de las rayas

Las magnitudes que intervienen son clasificadas en tres partes.

Causa	Circunstancia	Efecto
Realizadores de la obra o acción y condiciones que tienen para realizarla. Ejemplo: Obreros, máquinas, habilidad, etc.	Condiciones en el tiempo para realizar la obra. Ejemplo: Días, horas diarias, raciones diarias, etc.	La obra en sí, lo realizado y los inconvenientes o condiciones que pone el medio para la realización del trabajo. Ejemplo: Dificultades, resistencia del medio, etc.

Esquema:

	Causa		Circunstancia		Efecto	
1.ª serie	a_1	b_1	c_1	d_1	e_1	f_1
2.ª serie	x	b_2	c_2	d_2	e_2	f_2

Se cumple que el producto de las cantidades, siguiendo la dirección de las rayas, es constante.

Entonces:

$$a_1 \cdot b_1 \cdot c_1 \cdot d_1 \cdot e_2 \cdot f_2 = x \cdot b_2 \cdot c_2 \cdot d_2 \cdot e_1 \cdot f_1$$

EJERCICIOS DE APLICACIÓN:

Un grupo de 20 hombres trabajando 9 horas diarias pueden hacer una obra en 15 días. ¿Cuántas horas diarias deben trabajar 18 hombres para hacer la misma obra en 25 días?

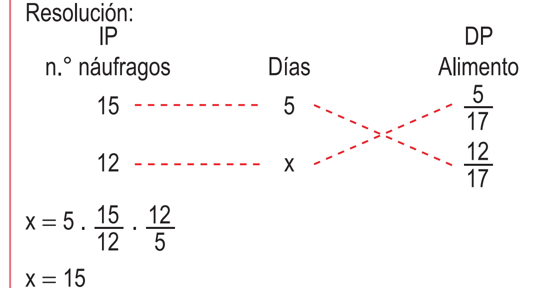
Resolución:

n.° obreros	n.° días	n.°h/d
20	15	9
18	25	x
IP	IP	
Igual	Igual	

$x = 9 \times \frac{20}{18} \times \frac{15}{25} = 6$ $\quad \therefore x = 6$ h/d

En una isla hay 15 náufragos que tienen alimentos para 17 días y luego de 5 días mueren 3. ¿Para cuántos días más de lo previsto tendrán alimentos?

Resolución:



$x = 5 \cdot \frac{15}{12} \cdot \frac{12}{5}$

$x = 15$

Luego, en total el alimento alcanzó para 20 días.
Entonces el alimento duró 3 días más de lo previsto.

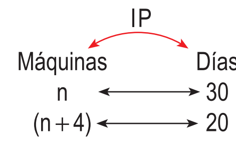
EFECTUAR

1. Si un tren recorre 319 km en 9 h 40 min, ¿cuánto tardará en recorrer 231 km?
2. ¿Cuántos hombres harían en 19 días un trabajo que 209 hombres pueden hacer en 10 días?
3. Si 8 hombres necesitan 75 días para acabar un trabajo, ¿cuántos hombres podrían hacerlo en 40 días?
4. ¿Cuánto tiempo necesitarán 12 hombres para hacer un trabajo que 8 hombres pueden hacer en 9 días?
5. 15 obreros han hecho la mitad de un trabajo en 20 días. En ese momento, abandonan el trabajo 5 obreros. ¿Cuántos días tardarán en terminar el trabajo los obreros que quedan?
6. Un barco tiene víveres para 78 tripulantes durante 22 días, pero solo viajan 66 personas. ¿Cuántos días durarán los víveres?
7. Se realiza una excursión al desierto y se inscriben 500 personas, las cuales llevan víveres para 72 días. ¿Cuántas personas no podrán viajar si se desea que la excursión dure 18 días más y se consuma la misma cantidad de raciones?
8. 15 peones hacen un trabajo en 20 días. Si aumentáramos al grupo anterior 10 peones, ¿en cuántos días harían el mismo trabajo?
9. 12 máquinas pueden producir 35 000 lapiceros en 21 horas. ¿Cuántos lapiceros podrán producir 24 máquinas en 18 horas?
10. 6 obreros pueden cavar una zanja en 15 días. Sin embargo, 3 días después de iniciado el trabajo ingresan 2 obreros más. ¿En cuántos días más se concluirá la obra?
11. Una guarnición de 1600 hombres tiene víveres para 10 días, a razón de tres raciones diarias para cada hombre. Si se refuerza con 400 hombres, ¿cuántos días durarán los víveres, si cada hombre toma 2 raciones diarias?
12. 20 operarios pueden producir 120 pares de zapatos en 18 días. ¿Cuántos operarios podrán producir 80 pares de zapatos en 24 días?

Problemas resueltos

1 Si n máquinas hacen una obra en 30 días, (n + 4) máquinas hacen la misma obra en 20 días; ¿en cuánto tiempo harán (n + 2) máquinas dicha obra?

Resolución:



$$(n+4) = \frac{n\ .\ 30}{20} \Rightarrow n = 8$$

Ahora reemplazamos:

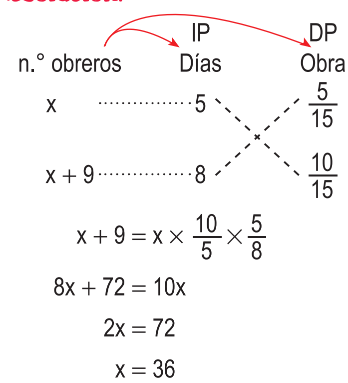
IP

Máquinas	Días
8	30
10	x

$$x = \frac{8\ .\ 30}{10} \Rightarrow x = 24 \text{ días}$$

2 Un grupo de obreros promete hacer una obra en 15 días, pero cuando ya habían trabajado 5 días contratan 9 obreros más con los que terminaron el trabajo 2 días antes. ¿Cuántos obreros había en el equipo inicialmente?

Resolución:



$$x + 9 = x \times \frac{10}{5} \times \frac{5}{8}$$

$$8x + 72 = 10x$$

$$2x = 72$$

$$x = 36$$

Luego, en el grupo inicial había 36 obreros.

3 Dieciocho obreros pueden hacer un muro en 24 días trabajando 8 horas diarias, con una eficiencia del 60%. ¿Qué tiempo emplearán 15 obreros en hacer el mismo muro trabajando una hora diaria más, con una eficiencia del 48%?

Resolución:

$18\ .\ 24\ .\ 8\ .\ 60\% = 15\ .\ x\ .\ 9\ .\ 48\%$

$\therefore\ x = 32$ días

4 Veinte obreros tardan 15 días de 7 h/d de trabajo en sembrar 500 m^2 de terreno. ¿Cuántos días tardarán 15 obreros doblemente eficientes en sembrar 800 m^2, trabajando 8 h/d?

Resolución:

$$\frac{20.15.7.1}{500} = \frac{15.x.8.2}{800} \qquad \therefore\ x = 14 \text{ días}$$

5 Doce obreros inicialmente pensaban hacer una obra en x días. Si después de haber hecho la mitad de la obra, 8 de los obreros aumentaron su rendimiento en un 25% con lo cual el tiempo total de trabajo fue de 13 días. Halla x.

Resolución:

IP

Obreros	Días	Obra (cte.)
12	$\frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$
$12 + \frac{8\ .\ 1}{4}$	$13 - \frac{x}{2}$	$\frac{1}{2}$

Luego: $13 - \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\ .\ \frac{12}{14}$

$$\frac{26 - x}{2} = \frac{12x}{14.2}$$

$$26 - x = \frac{6x}{7}$$

$$26\ .\ 7 - 7x = 6x$$

$$13x = 26\ .\ 7 \quad \Rightarrow \quad x = 14$$

Entonces, el valor de x es 14.

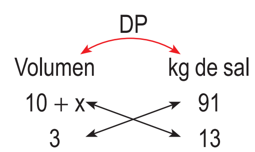
6 En 10 litros de agua de mar hay 91 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua potable hay que agregarle para que por cada 3 litros de la mezcla haya 13 gramos de sal?

Resolución:

Si a un recipiente que contiene agua con sal se le agrega agua pura, en dicho recipiente existirá la misma cantidad de sal que al inicio.

Sea:

x: n.° litros de agua potable.



$$13(10 + x) = 3\ .\ 91$$

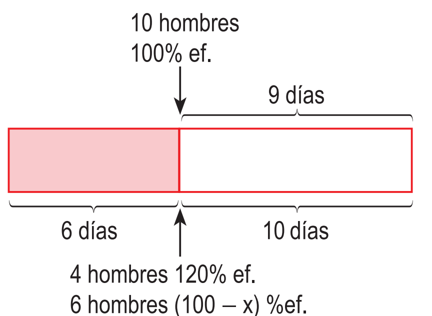
$$10 + x = 21$$

$$x = 11$$

7 Un trabajo puede ser realizado por 10 hombres en 15 días, 6 días después de iniciada la obra 4 de ellos aumentan su eficiencia en 20% y el resto baja en x%. Halla x si la obra se terminó a los 16 días de iniciada.

Resolución:

Representamos el trabajo como un rectángulo.



Del gráfico:

$$10\ .\ 100\%\ .\ 9 = (4\ .\ 120\% + 6(100 - x)\%)10$$

$$900 = 480 + 600 - 6x$$

$$6x = 180$$

$$x = 30$$

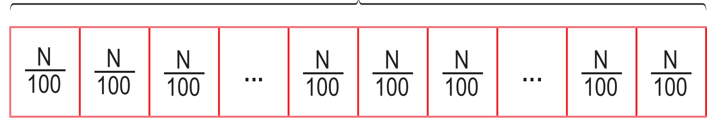
TANTO POR CIENTO

A

DEFINICIÓN

Se denomina tanto por ciento al número de partes que se toman en cuenta de una cierta cantidad que se ha dividido en 100 partes iguales.

$N <> 100$ partes iguales a $\frac{N}{100}$



n partes

$$n \text{ por ciento de } N <> \frac{n}{100} N = n\% N \text{ ; donde } \frac{1}{100} <> \%$$

Ejemplos:

- 18 por ciento de 450 <> $\frac{18}{100} \times 450 = 18\%(450)$
- 84 por ciento de 600 <> $\frac{84}{100} \times 600 = 84\%(600)$

Atención

En algunos casos es necesario expresar el tanto por ciento como una fracción. Veamos algunas equivalencias:

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

PORCENTAJE

Se define como el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

Entonces la expresión porcentual es:

Cantidad
↓
$$n\%\ N = P$$
Tanto por ciento ↗ ↖ Porcentaje

Ejemplos:

- $20\%(750) = \frac{20}{100} \times 750 = 150$ ↓ porcentaje
- $27\%(60) = \frac{27}{100} \times 60 = 16{,}2$ ↓ porcentaje

Nota

- ¿Cuál es el 8% de 9600?

  9600 — 100%

  x — 8%

  $x = \frac{9600 \times 8\%}{100\%} = 768$

- ¿Qué porcentaje es 133 de 380?

  380 — 100%

  133 — x

  $x = \frac{133 \times 100\%}{380} = 35\%$

- ¿De qué cantidad es 520 su 65%?

  520 — 65%

  x — 100%

  $x = \frac{520 \times 100\%}{65\%} = 800$

Operaciones con el tanto por ciento

1. $a\%N + b\%N = (a + b)\%N$

   Caso especial: $a\% = 100\%$

   $\Rightarrow N + b\%N = 100\%N + b\%N = (100 + b)\%N$

2. $a \times (b\%N) = (a \times b)\%N$

3. $a\%N - b\%N = (a - b)\%N$

   Caso especial: $a\% = 100\%$

   $\Rightarrow N - b\%N = 100\%N - b\%N = (100 - b)\%N$

4. El a% del b% del c% de N es:

   $a\%b\%c\%N$

Nota

$100\%N = \frac{100}{100}N = N$

AUMENTOS SUCESIVOS

Una computadora cuesta S/.1200 y se le hará dos aumentos sucesivos del 10% y 20%. ¿Cuál será el precio final?

Resolución:

- Aplicando el 1.er aumento: $1200 + 10\%(1200) = 110\%(1200) = 1320$
- Aplicando el 2.° aumento: $1320 + 20\%(1320) = 120\%(1320) = 1584$

∴ El precio final es S/.1584

Nota

Todo aumento o descuento sucesivo se hace tomando como referencia un todo (100%).

Aumento único

Dos aumentos sucesivos de a_1 y a_2 equivalen a un aumento único de:

$$\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$$

En general, m aumentos sucesivos a_1; a_2; ...; a_m, equivalen a un aumento único de:

$$\left[\frac{(100 + a_1) \times (100 + a_2) \times \ldots \times (100 + a_m)}{100^{m-1}} - 100\right]\%$$

Observación

Los tanto por ciento de un aumento sucesivo no se pueden sumar ya que no afectan a una misma cantidad.

DESCUENTOS SUCESIVOS

Si al precio de una lavadora que cuesta S/.1600, se le hace dos decuentos sucesivos del 25% y 18% , ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución:

- Aplicando el 1.[er] descuento: 1600 – 25%(1600) = 75%(1600) = 1200
- Aplicando el 2.° descuento: 1200 – 18%(1200) = 82%(1200) = 984

∴ El nuevo precio de la lavadora será S/.984

Observación

Los tanto por ciento de un descuento sucesivo no se pueden sumar ya que no afectan a una misma cantidad.

Descuento único

Dos descuentos sucesivos de d_1 y d_2 equivalen a un descuento único de:

$$\left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$$

En general, m descuentos sucesivos d_1; d_2; ...; d_m, equivalen a un descuento único de:

$$\left[100 - \frac{(100 - d_1) \times (100 - d_2) \times ... \times (100 + d_m)}{100^{m-1}}\right]\%$$

APLICACIONES COMERCIALES DEL TANTO POR CIENTO

Se presentan los siguientes casos:

1. Si el precio de venta (Pv) < precio de costo (Pc)

   Se cumple: $Pv = Pc - \text{pérdida}$

2. Si el precio de venta (Pv) = Precio de costo (Pc)
   En este caso, no hay ganancia ni pérdida.

3. Si el precio de venta (Pv) > precio de costo (Pc)

   Se cumple: $Pv = Pc + \text{ganancia}$ $\quad G_B = G_N + \text{gastos}$

   Donde:
   G_B: ganancia bruta (ganancia aparente)
   G_N: ganancia neta (ganancia real)

4. Cuando el comerciante fija el precio de la mercadería y el cliente obtiene una rebaja al comprar dicha mercadería, entonces se cumple:

   $$Pv = P_F - \text{descuento}$$

   Donde:
   P_F: precio fijado o precio de lista (P_L)

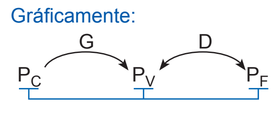
Importante

- Las ganancias se representan como un tanto por ciento del precio de costo.
- Los descuentos se representan como un tanto por ciento del precio fijado.

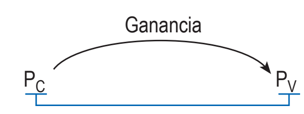
Nota

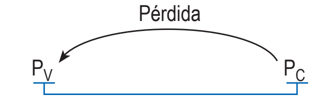
Se cumple:
Pc + G = Pf – D

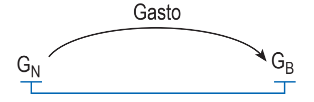
Gráficamente:



Gráficamente







EFECTUAR

1. Calcula el 20% del 30% de 10 000.
2. Halla el 5% del 15% del 1650.
3. ¿Qué porcentaje es 127 de 481?
4. ¿De qué cantidad es 620 su 52%?

1 Calcula el 50% de 916 más el 25% de 2600.

Resolución:

50% . 916 + 25% . 2600

$\frac{50}{100} . 916 + \frac{25}{100} . 2600 = 1108$

2 Si el x% de 4200 es 840, halla: 2x + 8.

Resolución:

$\frac{x}{100} . 4200 = 840$

$42x = 840$

$x = 20$

Piden: 2x + 8

$2(20) + 8 = 48$

3 Si al precio de una lavadora que cuesta 200 dólares, se le hacen dos descuentos sucesivos del 20% y 10%, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución:

Calculamos el descuento único:

$DU = \left(20 + 10 - \frac{20 \times 10}{100}\right)\% = 28\%$

⇒ El nuevo precio será: 200 – 28%(200) = $144

4 Un ambulante compra maletines a 18 nuevos soles. ¿A cómo tiene que venderlos para ganar el 20% de la venta?

Resolución:

Pv = Pc + ganancia
Pv = Pc + 20% Pv
80% Pv = Pc
80% Pv = S/.18
∴ Pv = S/.22,5

5 Un comerciante compra al contado un artículo con un descuento del 20% del precio de lista. ¿Qué porcentaje del precio de lista representa el precio de venta del comerciante, si él debe ganar el 20% del precio de compra?

Resolución:

Sea P_L el precio de lista.

Por dato:

Pv = 120%Pc o también

$Pv = 120\%(80\%\ P_L)$

Nos piden:

$x\% \times P_L = P_V$

$\frac{x}{100} \times P_L = \frac{120}{100} \times \frac{80}{100} \times P_L \quad \Rightarrow x = 96$

∴ x% = 96%

6 De un conjunto de 400 personas, el 70% son hombres y el resto son mujeres. Sabiendo que el 80% de los hombres y el 75% de las mujeres son extranjeros, ¿cuántas personas no son extranjeras en dicho conjunto?

Resolución:

Total de personas: 400

H = 70%(400)

$H = \frac{70}{100} . 400$

H = 280

M = 400 – 280

M = 120

Por dato:
Nombres extranjeros = 80%(280) = 224
Luego, hombres no extranjeros = 56
Además:
Mujeres extranjeras = 75%(120) = 90
Luego, mujeres no extranjeras = 30
∴ Personas que no son extranjeras:
56 + 30 = 86

7 Para fijar el precio de venta de un artículo se aumentó su costo en un 30%, pero al venderlo se hizo un descuento del 10% de este precio fijado. ¿Qué tanto por ciento del costo se ganó?

Resolución:

Se le hace un aumento:

$P_F = Pc + 30\%Pc$

$P_F = 130\%Pc$ ...(1)

Luego, se le hace un descuento:

$Pv = P_F - 10\%P_F$

Pv = 90%PF ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

Pv = 90%(130%Pc)

Pv = 117%Pc

Pv = 100%Pc + 17%Pc

Pv = Pc + 17% Pc

$\underbrace{Pv - Pc}_{\text{Ganancia}} = 17\%Pc$

Ganancia = 17%Pc

Por lo tanto, se ganó el 17% del precio de costo.

8 Si gastara el 30% del 40% de mi dinero tendría S/.115 más que si hubiese gastado el 50% del 70% de mi dinero mencionado. ¿Cuánto es mi dinero?

Resolución:

Sea el dinero: N = 50k

Por dato:

30%(40%)(50k) = 6k ⟶ queda 44k

$50\%(70\%)(50k) = \frac{35}{2}k$ ⟶ queda $\frac{65}{2}k$

$44k - \frac{65}{2}k = 115$

$k = 10$

∴ N = 500

9 En un salón A hay 40 alumnos y en otro salón B hay 20 alumnos. ¿Cuántos alumnos deben pasarse de A a B para que los alumnos de A sean el 33 1/3% de los alumnos de B?

Resolución:

Salón A: 40 alumnos

Salón B: 20 alumnos

$$(40 - x) = 33\frac{1}{3}\% \ (20 + x)$$
$$40 - x = \frac{100}{3}\% \ (20 + x)$$
$$40 - x = \frac{100}{100 \cdot 3}(20 + x)$$
$$120 - 3x = 20 + x$$
$$100 = 4x$$
$$25 = x$$

Por lo tanto, deben pasarse 25 alumnos.

10 Se compran 2750 huevos por 1000 soles, pero se rompen 350 y se vende los restantes a 7 soles la docena. ¿Cuál es el porcentaje de la ganancia?

Resolución:

De los 2750 se rompen 350 $\Rightarrow$ 2750 – 350 = 2400

Quedan 2400 huevos para la venta.

$$\left.\begin{array}{l} 2400 <> 200 \text{ docenas} ______ x \\ \quad 1 \text{ docena} ______ \text{S/.}7 \end{array}\right\} x = \text{S/.}1400$$

$\Rightarrow$ Se obtuvo una venta de S/.1400

Ganancia = S/.1400 – S/.1000 = S/.400

$$\text{El \% de la ganancia} = \left(\frac{\text{ganancia}}{\text{precio de compra}}\right)\% = \left(\frac{400}{1000}\right)\%$$

$\therefore$ El porcentaje de la ganancia es 40%.

11 El costo de la mano de obra y las indemnizaciones suman el 40% del valor de una obra. Si las indemnizaciones representan el 60% del importe de la mano de obra. ¿Qué tanto por ciento del valor de la obra importa solamente la mano de obra?

Resolución:

Sean:

M: mano de obra

I: indemnización

O: valor de obra

Dato:

$M + I = 40\%\ O$ .... (1)

$I = 60\%\ M$ .... (2)

(2) en (1):

$60\%M + M = 40\%\ O$

$160\%M = 40\%O \Rightarrow 4M = O$

Piden:

$$\frac{x}{100}(O) = M \ \Rightarrow \ \frac{x}{100}(4M) = M \ \Rightarrow \ x\% = 25\%$$

12 El costo de fabricación de un artículo es S/.400. El fabricante lo vende al comerciante ganando un x% y este al consumidor con una ganancia del 2x% sobre su precio de compra. Si el consumidor paga S/.750 por el artículo, ¿cuánto gana el fabricante?

Resolución:

Fabricante: F

$Pv_F = 400 + x\%(400) = (1 + x\%) \cdot 400$

Comerciante: C

$Pv_C = (1 + x\%) \cdot 400 + 2x\%(1 + x\%) \cdot 400$

$Pv_C = (1 + 2x\%)(1 + x\%) \cdot 400$

Consumidor paga S/.750 por el artículo, entonces:

$$(1 + 2x\%)(1 + x\%) \cdot 400 = 750$$
$$(100 + 2x)(100 + x) = \frac{750.100.100}{400}$$
$$(100 + 2x)(100 + x) = 150 \cdot 125$$
$$\Rightarrow x = 25$$

Ganancia del fabricante:

$x\%(400) = 25\%(400) = \text{S/.}100$

13 En una compañía se multiplican los costos por un factor n para fijar el precio de venta y al momento de su venta se hace una rebaja de x% al comprador y aun así la compañía gana el x% del costo. Halla x en función de n.

Resolución:

Sean:

Pv: precio de venta; P_F: precio fijado; Pc: precio de costo

Del enunciado:

$P_F = n \times Pc$

Sabemos:

$Pv = P_F -$ descuento

Luego:

$Pv = P_F - x\%P_F = (100 - x)\%\ P_F$

$Pv = (100 - x)\%n \times Pc$ ... (1)

También:

$Pv = Pc + x\%Pc$

$Pv = (100 + x)\%Pc$ ... (2)

Igualando (1) y (2):

$$(100 - x)\%n \times Pc = (100 + x)\%Pc$$
$$(100 - x)n = 100 + x$$
$$\therefore x = \frac{n - 1}{n + 1} \times 100$$

MEZCLA

DEFINICIÓN

Es la unión de dos o más sustancias (homogéneas) en cualquier proporción donde sus componentes conservan su propia naturaleza.

REGLA DE MEZCLA

Es la operación que tiene por finalidad resolver dos tipos de problemas: determinar el precio medio (Pm) de una mezcla y conocer la relación en que se deben mezclar las sustancias.

Directa

consiste en determinar el precio medio (P_m) de una mezcla, conocidas las cantidades que intervienen de cada uno de los componentes y sus respectivos precios unitarios.

P_1 P_2 P_3 ... P_n

C_1 C_2 C_3 ... C_n

$$P_m = \frac{P_1C_1 + P_2C_2 + P_3C_3 + ... + P_nC_n}{C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n}$$

Donde:
Precios unitarios: P_1; P_2; P_3; ...; P_n
Cantidad es: C_1; C_2; C_3; ...; C_n

Inversa

Cuando se trata de conocer la relación en que intervienen los componentes, conociendo los precios unitarios y el precio medio.

$P_1 < P_2$ → P_m

C_1 C_2 → $C_1 + C_2$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_2 - P_m}{P_m - P_1}$$

ALEACIÓN

Es una mezcla que se realiza fundiendo dos o más metales. Generalmente las aleaciones se realizan entre un metal fino (de mayor valor) con otro que se considera como ordinario.

Ley de una aleación (L)	Liga de una aleación
Es la razón entre el peso del metal fino puro y el peso total de la aleación. $L = \frac{W_{fino}}{W_{total}}$ Donde: $0 \le L \le 1$	Es la relación entre el peso del metal ordinario y el peso total de la aleación. $Liga = \frac{W_{ordinario}}{W_{total}}$

Ley media (L_m)

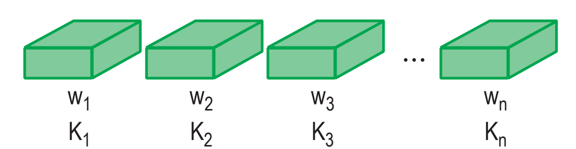
Sean:
Pesos de los metales: w_1; w_2; w_3; ...; w_n
Leyes de las aleaciones: L_1 ; L_2; L_3; ... ; L_n

Entonces:

$$L_m = \frac{w_1L_1 + w_2L_2 + w_3L_3 + ... + w_nL_n}{w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n}$$

Quilate medio (K_m)

Sean:
Pesos de las aleaciones: w_1; w_2; w_3; ...; w_n
Número de kilates: K_1; K_2; K_3; ...; K_n



$$K_m = \frac{w_1K_1 + w_2K_2 + w_3K_3 + ... + w_nK_n}{w_1 + w_2 + w_3 + ... + w_n}$$

Nota

Un caso particular de mezcla es **mezcla alcohólica**, donde se combinan cantidades convenientes de alcohol puro y agua destilada.

Grado de una mezcla alcohólica (G):
indica la razón que existe entre el volumen de alcohol puro y el volumen de la mezcla.

$$G = \frac{V_{alcohol\ puro}}{V_{mezcla}} \times 100$$

Donde: G se expresa en grado o en porcentaje.

Además, debemos considerar:
G_{agua} <> 0° o 0%
$G_{alcohol\ puro}$ <> 100° o 100%

Grado medio (G_m)

$$G_m = \frac{G_1V_1 + G_2V_2 + ... + G_nV_n}{V_1 + V_2 + ... + V_n}$$

Donde:
Grados: G_1; G_2; ... ; G_n
Volúmenes: V_1; V_2; ...; V_n

Observación

- **Metales finos**
  Oro (Au), plata (Ag), platino (Pt), etc.
- **Metales ordinarios**
  Cobre (Cu), plomo (Pb), estaño (Sn), etc.

Atención

- L + Liga = 1
- Si L = 0, la aleación está conformada por un metal ordinario.
- Si L = 1, la aleación está conformada por un metal fino.

Nota

Para el caso en que el metal fino sea el oro su ley se puede expresar en quilates.

$$L = \frac{K}{24}$$

Donde:
K: es el número de quilates

$K = 24L$

Problemas resueltos

1 ¿Cuántos litros de agua deben agregarse a 12 litros de alcohol de un 96% de pureza para obtener una solución de un 60% de pureza?

Resolución:

Sea x la cantidad a agregar.
Por regla de mezcla directa:

$$\frac{12 \times 96 + x(0)}{12 + x} = 60$$

$$1152 = (12 + x)60$$
$$1152 = 720 + 60x$$
$$\Rightarrow x = 7{,}2 \text{ L}$$

Por lo tanto deben agregarse 7,2 litros de agua.

2 Un brazalete de oro de ley 0,416 pesa 50 g. ¿Cuántos gramos de oro puro tendrá?

Resolución:

Sabemos:

$$L = \frac{W_{\text{metal fino}}}{W_{\text{aleación}}}$$

$$0{,}416 = \frac{x}{50}$$

$$\therefore \; x = 20{,}8\text{g}$$

3 ¿Qué cantidad de cobre se debe agregar a una barra de oro de 56,4 kg cuya ley es 0,850 para que disminuya a 0,750?

Resolución:

Sea x la cantidad de cobre:

$$\frac{56{,}4 \times 0{,}850 + x(0)}{56{,}4 + x} = 0{,}750$$

$$47{,}94 + 0 = 0{,}750(56{,}4 + x)$$
$$47{,}94 = 42{,}3 + 0{,}750x$$
$$5{,}64 = 0{,}750x$$
$$\therefore x = 7{,}52 \text{ kg}$$

4 Se quiere obtener 300 litros de alcohol de 74°, mezclando 90 litros de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua. ¿Qué cantidad de agua se necesitará?

Resolución:

Del enunciado:

Cantidad	Grado
90	80°
210 − x	100°
x	0°
300	74°

$$\Rightarrow \frac{90(80°) + (210 - x)100° + x(0°)}{300} = 74°$$

$$7200° + 21\,000° - 100°x = 22\,200°$$
$$6000 = 100x \Rightarrow \; x = 60$$

$\therefore$ Se necesitan 60 L de agua.

5 ¿Qué cantidad de aceite de 6 soles el litro debe mezclarse con aceite de 10 soles el litro para obtener 120 litros de mezcla, de manera que vendidos a 7 soles el litro, no se produzca pérdida ni ganancia?

Resolución:

Sean C_1 y C_2 las cantidades a mezclar:

$$\frac{6(C_1) + 10(C_2)}{C_1 + C_2} = 7$$

$$\frac{6C_1 + 10C_2}{120} = 7$$

$$6C_1 + 10C_2 = 840 \qquad ...(1)$$

Pero:

$$C_1 + C_2 = 120 \qquad ...(2)$$

De (1) y (2):

$$C_1 = 90 \text{ L} \quad \wedge \quad C_2 = 30 \text{ L}$$

6 Se tienen dos recipientes que contienen alcohol al 50% y 70% respectivamente, cuyos volúmenes son 7 litros y 3 litros respectivamente. Se agrega a cada recipiente igual número de litros de agua y resulta que tienen la misma concentración de alcohol. Halla el número de litros de agua que se agrega.

Resolución:

Sea x la cantidad de agua que se agrega:

$$\Rightarrow \frac{7 \times 50 + (0)x}{7 + x} = \frac{3 \times 70 + (0)x}{3 + x}$$

$$\frac{350}{7 + x} = \frac{210}{3 + x}$$

$$5(3 + x) = 3(7 + x)$$
$$15 + 5x = 21 + 3x$$
$$2x = 6$$
$$\therefore \; x = 3 \text{ litros}$$

7 Se mezclan 10 kg de café de primera con 15 kilogramos de café de segunda, sabiendo que 1 kg de café de primera más 1 kg de café de segunda cuestan S/.30. Si se hubiera mezclado 15 kg de café de primera con 10 kg de café de segunda el precio medio hubiera sido S/.2 más. ¿Cuál es el precio de un kilogramo de café de segunda?

Resolución:

Por dato, para 1 kg de c/u:

$$P_1 + P_2 = S/.30 \qquad ...(1)$$

Además: $$\frac{10P_1 + 15P_2}{25} = P_m \qquad ...(2)$$

Pero si la mezcla hubiese sido: $$\frac{15P_1 + 10P_2}{25} = P_m + 2 \qquad ...(3)$$

(3) − (2): $$\frac{15P_1 + 10P_2 - 10P_1 - 15P_2}{25} = 2$$

$$5P_1 - 5P_2 = 50$$
$$\Rightarrow P_1 - P_2 = 10 \qquad ...(4)$$

(1) − (4): $2P_2 = 20 \Rightarrow P_2 = S/.10$

A

REGLA DE INTERÉS

Es una operación que consiste en determinar la ganancia o beneficio, generado por un capital, en un determinado tiempo y a una determinada tasa de interés.

Elementos

- Capital (C): es el dinero, acciones, propiedades, etc. que se impone durante algún tiempo para generar una ganancia.
- Tiempo (t): periodo durante el cual se impone un capital.
- Tasa de interés (r%): ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias en un cierto tiempo.
- Interés (I): ganancia que produce el capital, durante cierto tiempo y bajo ciertas condiciones.
- Monto (M): está dado por la suma del capital con su interés.

Recuerda

Cuando no se mencione la unidad de tiempo referida a la tasa de interés, se asumirá una tasa anual

Tasas equivalentes

Dos o más tasas son equivalentes si colocadas durante el mismo tiempo se obtiene la misma ganancia.

Ejemplos:

4% mensual <> { 8% bimestral; 16% cuatrimestral; 48% anual }

20% trimestral <> 80% anual
10% bimestral <> 60% anual
25% semestral <> 50% anual

CLASES DE INTERÉS

El interés puede ser simple o compuesto.

Interés simple

Es cuando la ganancia que origina un capital no se acumula al capital.

Ejemplo:

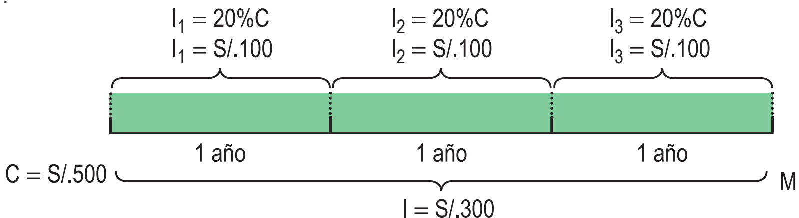
¿Cuánto se recibirá al prestar S/.500 al 20% durante 3 años?

Resolución:

Dato:

C = S/.500; r% = 20%; t = 3 años

Piden: M = ?



Entonces:

Monto = Capital + Interés

Monto = 500 + 300

Monto = S/.800

Observación

- Si la tasa (r%) es **anual** y el tiempo en meses:

$$I = \frac{C\,.\,r\,.\,t}{1200}$$

- Si la tasa (r%) es **anual** y el tiempo en días:

$$I = \frac{C\,.\,r\,.\,t}{36\,000}$$

Fórmula para calcular el interés simple

El interés (I) que produce un capital (C) impuesto al r% durante un tiempo (t) es:

$$I = \frac{C\,.\,r\,.\,t}{100}$$

Además:

M = C + I, entonces: $M = C(1 + r\%t)$

Nota:

Las unidades de la tasa y el tiempo deben ser homogéneas.

r%	anual	bimestral	semestral	diario
t	n.° de años	n.° de bimestres	n.° de semestres	n.° de días

Interés compuesto

Es cuando el interés que produce el capital se acumula al capital en intervalos de tiempo especificados.

Ejemplo:

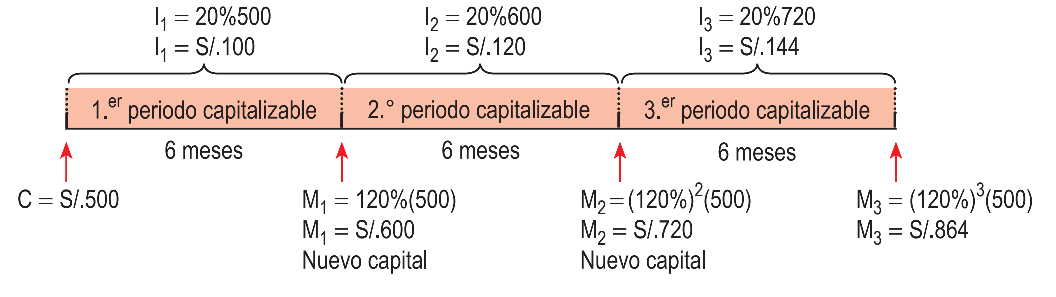
Calcula el interés que producirá S/.500 en 18 meses al 40% anual capitalizable semestralmente.

Observaciones

- Equivalencias comerciales del tiempo:
  1 mes comercial <> 30 días
  1 año comercial <> 360 días
  1 año común <> 365 días
  1 año bisiesto <> 366 días
- Cuando no se menciona que tipo de interés se está empleando, se asume que es un interés simple.

Resolución:
Datos:
C = S/.500; t = 18 meses y r% = 40% anual <> 20% semestral

Capitalizable semestralmente



En general:

$$M = C \cdot (1 + r\%)^n$$

Donde:
n es el n.° de periodos capitalizados contenidos en el tiempo de imposición.

EFECTUAR

1. Un señor divide su capital en 3 partes iguales y los impone al 1% mensual, 5% trimestral y 4% semestral respectivamente, logrando una renta anual de S/.10 000. ¿Cuál era su capital?

2. Los 2/3 de un capital se imponen al 6% anual, los 3/4 del resto al 1,5% bimestral y el resto al 1% mensual. Si al cabo de 2 años 1 mes, se recibe en total S/.8287,5, ¿cuál era el capital original?

3. En una entidad bancaria, los intereses se calculan del siguiente modo: por el millar se da el 30% bianual y por el restante el 4,5% semestral. ¿Qué utilidad habrá generado S/.20 800 en el lapso de un año?

4. Un usurero vive de los intereses que produce su capital impuesto al 5%. Al final de cada año retira los intereses para cubrir sus gastos; pero, al final del octavo año además de los intereses retira $200 de su capital. Al hacer sus cuentas al finalizar el noveno año obtiene como gasto total $8650. ¿Cuál fue su capital?

5. Se colocan 3 capitales a interés simple durante 5 años y se convierten respectivamente en: S/.15 840; S/.14 520 y S/.12 480. Halla el mayor capital, sabiendo que suman S/.37 500.

6. Después de prestar un capital por 3 años se obtiene un monto igual al triple del capital prestado. Al prestar S/.3000, a la misma tasa de interés por un año y 3 meses, ¿cuál será el interés a recibir?

7. La relación de los montos generados por 2 capitales es de 2 a 3, siendo su relación de tiempos de 1 a 3 respectivamente. Si el primero se colocó al 9% y el segundo al 0,25% mensual, ¿en qué relación se encuentran, la suma y diferencia de cuadrados de dichos capitales?

8. Halla un capital, tal que al imponer sus 5/11 al 6% y el resto al 5%, retira anualmente $80 menos que si los 5/11 los colocara al 5% y el resto al 6%.

9. Se imponen 2 capitales al 5% durante 10 años; si la diferencia de ellos es $4000 y la suma de los intereses es $14 000, halla el mayor de los capitales.

10. La tercera parte de un capital se coloca al 9% anual de interés simple. ¿A qué tanto por ciento deberá colocarse el resto para obtener un beneficio total del 11% anual de dicho capital?

Problemas resueltos

1 Un capital se impone al 25% semestral durante 18 meses, transformándose en un monto de S/.3500. Calcula el capital.

Resolución:

Piden capital: C
Tenemos:
r% = 25% semestral
t = 18 meses <> 3 semestres
M = S/.3500

Entonces, tenemos:
$I = C \times 25\% \times 3 = 75\%C$
$M = C + I$
$3500 = C + 75\%C$
$\therefore\ C = S/.2000$

2 Un capital impuesto al 5% de interés anual simple, ha producido durante un tiempo una renta equivalente al 4% del monto. ¿Cuál es este tiempo?

Resolución:

Se sabe: $I = 4\%(C + I)$
$I = 4\%C + 4\%I$
$96\%I = 4\%C \Rightarrow C = 24I$

$C = 24\left(\frac{C \times 5 \times t}{100}\right)$

$\therefore t = \frac{5}{6}$ años = 10 meses

3 El monto de un capital impuesto durante 8 años es S/.12 400. Si al mismo capital se le hubiera impuesto el mismo interés durante 9 años y 6 meses, el monto sería de S/.12 772. ¿Cuál es el capital?

Resolución:

Sea C el capital, luego:
$12\,400 = C + I\ (8 \text{ años})$ ...(1)
$12\,772 = C + I\ (9{,}5 \text{ años})$ ...(2)
$(2) - (1) \Rightarrow 372 = I\ (1{,}5 \text{ años})$
$372 = \frac{C.r.(1{,}5)}{100} \Rightarrow C.r = 24\,800$ ...(3)

Además, de (1): $12\,400 = C + \frac{C.r.8}{100}$
De (3): $12\,400 = C + 1984$
Entonces: C = S/.10 416

4 La diferencia de los intereses producidos por dos capitales que suman S/.90, durante 3 años al 50% anual, es igual a S/.15. Calcula los intereses de cada uno de dichos capitales.

Resolución:

Del enunciado: $C_1 + C_2 = 90$; r = 50% anual; t = 3 años

Además:
$$I_1 - I_2 = 15$$
$$C_1 \times 50\% \times 3 - C_2 \times 50\% \times 3 = 15$$
$$C_1 - C_2 = 10$$
$$C_1 + C_2 = 90 \quad (+)$$
$$C_1 = 50$$
$$C_2 = 40$$

Ahora:
$I_1 = 50 \times 50\% \times 3$ $\qquad$ $I_2 = 40 \times 50\% \times 3$
$I_1 = S/.75$ $\qquad$ $I_2 = S/.60$

5 Un capital produce un cierto interés al cabo de un tiempo en el cual se observa que la diferencia entre el capital y el interés equivale al 42% de dicho capital. ¿Qué interés produce un capital de S/.30 000 en la tercera parte del tiempo anterior y con una tasa 50% menor?

Resolución:

$C - I = 42\%C$
$I = 58\%C$
Luego: $58\%\ C = C\ .\ r\%\ .\ t \Rightarrow r\%\ .\ t = 58\%$

Piden: $I_1 = 30\,000 \times \frac{r\%}{2} \times \frac{t}{3}$

$I_1 = 30\,000 \times \frac{58\%}{6} = S/.2900$

6 Se impone un capital al 15% semestral durante 10 años, al cabo de este tiempo se retira el dinero y se vuelve a colocar el mismo capital al 15% durante 5 años más. Halla la tasa que produciría el mismo interés en todo ese tiempo.

Resolución:

Sea C el capital impuesto.
r% = 15% semestral
t = 20 semestres = 10 años
$I_{10\text{años}} = 15\%C \times 20 = 300\%C$
$I_{5\text{ años}} = 15\%C \times 5 = 75\%C$
$I_{15\text{ años}} = 375\%C$

Dividiendo entre 15:
$I_{1\text{ año}} = 25\%C$
En un año se gana el 25% del capital.
Por lo tanto:
tasa de interés = 25% anual

7 Un negociante recibe anualmente una ganancia de S/.120 000 que proviene de dos de sus negocios que le producen intereses que están en la relación de 2 a 3. Si las tasas de interés son 16% y 18% respectivamente; hallar la diferencia de los capitales empleados en cada negocio.

Resolución:

$I_1 = 2k\ ,\ I_2 = 3k \Rightarrow I_1 + I_2 = 5k = 120\,000$
$k = 24\,000$
$48\,000 = C_1 \times 16\% \times 1 \Rightarrow C_1 = 300\,000$
$72\,000 = C_2 \times 18\% \times 1 \Rightarrow C_2 = 400\,000$
$\therefore\ C_1 - C_2 = S/.100\,000$

8 Una suma de S/.10 000 se ha impuesto a interés simple. Si hubiera estado 30 días más el interés total habría aumentado en S/.50 y si el tanto por ciento se hubiera disminuido en 0,8% los intereses habrían disminuido en S/.150. Halla el tiempo que ha durado la imposición.

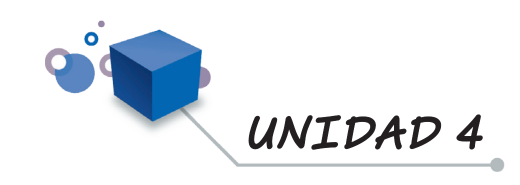
Resolución:

1. $\frac{10\,000\ .\ r\ .\ (t+30)}{36\,000} - \frac{10\,000\ .\ r\ .\ t}{36\,000} = 50$

$\Rightarrow r = 6\%$

2. $\frac{10\,000\ .\ 6\ .\ t}{36\,000} - \frac{10\,000\ .\ 5{,}2t}{36\,000} = 150$

$\therefore\ t = 675$ días



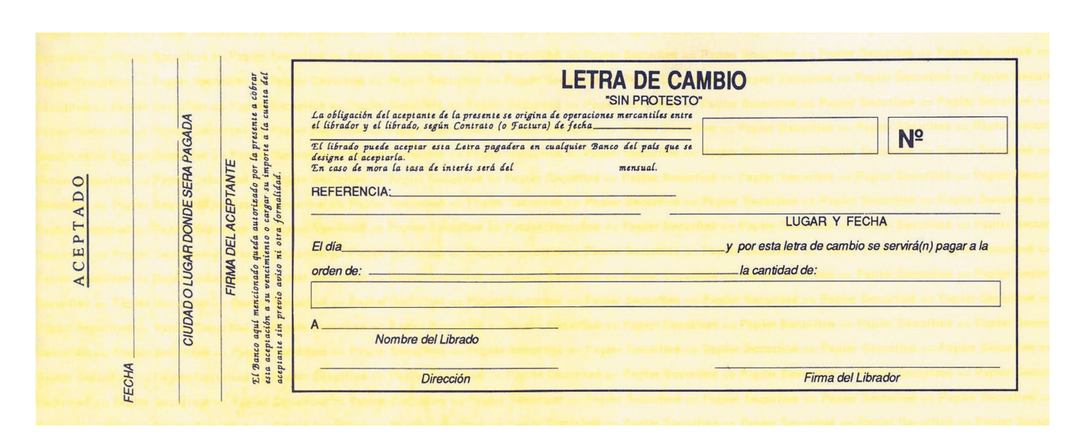
DESCUENTO

REGLA DE DESCUENTO

La regla de descuento es el conjunto de fundamentos para el cálculo del descuento que se hace a un documento comercial de pago por hacerse efectivo antes de la fecha de vencimiento.

Letra de cambio

Es un documento comercial, legal y negociable, mediante el cual una persona llamada deudora o aceptante de la letra se compromete a pagar una suma de dinero (valor nominal) a otra persona o financiera crediticia, denominada la acreedora o la giradora, al cabo de un determinado tiempo (fecha de la aceptación a la fecha de vencimiento).



ACEPTADO

FECHA

CIUDAD O LUGAR DONDE SERA PAGADA

FIRMA DEL ACEPTANTE

El Banco aquí mencionado queda autorizado por la presente a cobrar esta aceptación a su vencimiento o cargar su importe a la cuenta del aceptante sin previo aviso ni otra formalidad.

LETRA DE CAMBIO

"SIN PROTESTO"

La obligación del aceptante de la presente se origina de operaciones mercantiles entre el librador y el librado, según Contrato (o Factura) de fecha

El librado puede aceptar esta Letra pagadera en cualquier Banco del país que se designe al aceptarla.
En caso de mora la tasa de interés será del mensual.

Nº

REFERENCIA:

LUGAR Y FECHA

El día ______ y por esta letra de cambio se servirá(n) pagar a la orden de: ______ la cantidad de:

A ______
Nombre del Librado

Dirección

Firma del Librador

Elementos de la regla de descuento

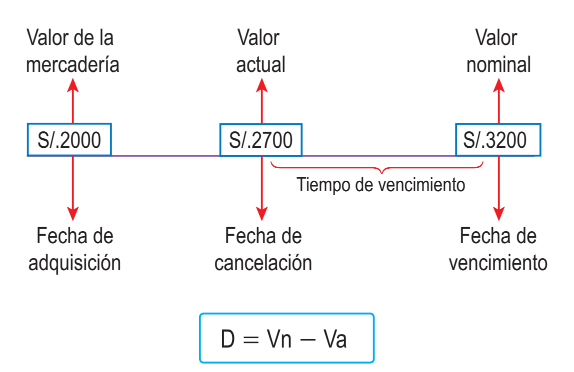
Descuento (D). Es la rebaja o disminución que se obtiene al cancelar la letra de cambio (deuda) antes de la fecha de vencimiento.

Valor nominal (Vn). Es aquella cantidad que figura en la letra de cambio, la cual se hace efectivo en la fecha de vencimiento.

Valor actual (Va). Llamado también valor efectivo, es el dinero en efectivo que se recibe al cancelar o negociar una letra de cambio antes de la fecha de vencimiento.

Tiempo de vencimiento (t). Es el tiempo que falta para el vencimiento del documento al momento de realizar un pago anticipado.

Tasa de descuento (r%). Es el tanto por ciento aplicado por cada cierto periodo establecido a un determinado valor (valor nominal y actual).



$$D = Vn - Va$$

Atención

Veamos la siguiente aplicación:

Josué compra a Julio una laptop pagando S/.500 de cuota inicial y por el saldo acepta una letra de cambio por S/.4000 para pagar después de 90 días.

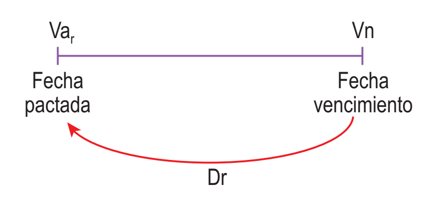
Julio no puede cobrar la letra hasta la fecha de vencimiento, como necesita en efectivo vende dicho documento al banco que le anticipa el pago con una cantidad inferior a S/.4000.

Esta diferencia entre la cantidad señalada en la letra (**valor nominal**) y la cantidad pagada por el banco (**valor actual o efectivo**) se llama DESCUENTO.

CLASES DE DESCUENTO

Descuento racional o matemático (Dr)

Es el interés simple que produce el **valor actual** de una letra desde el día que se hace efectivo el documento hasta la fecha de su vencimiento, según la tasa fijada. A este interés se le denomina descuento racional (Dr) y al valor actual que se paga por la letra, habiendo aplicado el descuento racional, se denomina valor actual racional (Va_r).



$$Dr = Va_r \,.\, r\% \,.\, t$$

Sabemos:

$$Vn = Va_r + Dr$$

$$Vn = Va_r + Va_r \,.\, r\% \,.\, t$$

$$Vn = Va_r(1 + r\% \,.\, t)$$

Además:

$$Dr = \left(\frac{Vn}{1 + r\% \,.\, t}\right) . \, r\% \,.\, t$$

$$Dr = \frac{Vn \,.\, r\% \,.\, t}{1 + r\% \,.\, t}$$

Atención

En el descuento racional (Dr) se debe tener en cuenta:
Si r% (anual), entonces:

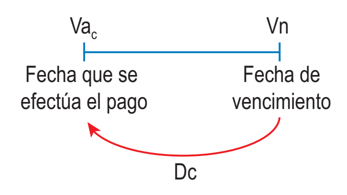
$$Dr = \frac{Va_r \,.\, r \,.\, t}{100} \quad \text{(t: años)}$$

$$Dr = \frac{Va_r \,.\, r \,.\, t}{1200} \quad \text{(t: meses)}$$

$$Dr = \frac{Va_r \,.\, r \,.\, t}{36\,000} \quad \text{(t: días)}$$

Descuento comercial o abusivo (Dc)

Es el interés simple que produce el **valor nominal** de una letra de cambio desde el día en que se hace efectivo el descuento hasta el día del vencimiento, según una tasa efectiva (%). A este interés se le denomina el descuento comercial (Dc) y al valor actual que se paga por la letra, habiéndose aplicado el descuento comercial, se le denomina valor actual comercial (Va_c).



$$Dc = Vn \,.\, r\% \,.\, t$$

Sabemos:

$$Va_c = Vn - Dc$$

$$Va_c = Vn - Vn \,.\, r\% \,.t$$

$$Va_c = Vn(1 - r\% \,.\, t)$$

$$Vn = \frac{Va_c}{1 - r\% \,.\, t}$$

Además:

$$Dc = \left(\frac{Va_c}{1 - r\% \,.\, t}\right) . \, r\% \,.\, t$$

$$Dc = \frac{Va_c \,.\, r\% \,.\, t}{1 - r\% \,.\, t}$$

Atención

En el descuento comercial (Dc) se debe tener en cuenta:
Si r% (anual), entonces:

$$Dc = \frac{Vn \,.\, r \,.\, t}{100} \quad \text{(t: años)}$$

$$Dc = \frac{Vn \,.\, r \,.\, t}{1200} \quad \text{(t: meses)}$$

$$Dc = \frac{Vn \,.\, r \,.\, t}{36000} \quad \text{(t: días)}$$

PROPIEDADES

1. $Va_r = Vn - Dr$
   $Va_c = Vn - Dc$
   $Va_r - Va_c = Dc - Dr$

2. $\dfrac{Va_c}{Va_r} = 1 - (r\% \,.\, t)^2$

3. $Dc > Dr \Rightarrow Va_r > Va_c$

4. $\dfrac{Dc}{Dr} = 1 + r\% \,.\, t$

5. $Vn = \dfrac{Dr \,.\, Dc}{Dc - Dr}$

Demostración:
Sabemos que:
$Dc = Vn \,.\, r\% \,.\, t \ \wedge \ Dr = Va_r \,.\, r\% \,.\, t$

Entonces:
$Dc - Dr = r\% \,.\, t(Vn - Va_r) \Rightarrow Dc - Dr = Dr \,.\, r\% \,.\, t$

Luego:
$(Dc - Dr)Vn = Dr \,.\, \overbrace{r\% \,.\, t \,.\, Vn}^{Dc} \Rightarrow Vn = \dfrac{Dr.Dc}{Dc - Dr}$ (l. q. q. d.)

Nota

Si no se indica qué tipo de descuento, se asume que es un descuento comercial.

Recuerda

Dos letras son equivalentes si sus valores actuales son iguales.

Nota

Compra a plazos

Cuando se compra al crédito, muchas veces se paga una parte y el saldo se cancela en cuotas cada cierto tiempo, el valor de cada cuota es el valor nominal de la letra, y la suma de los valores actuales de las letras es igual al saldo.

$$Pc = C.I. + \Sigma V_a$$

Donde:
C.I.: cuota inicial
Pc: precio al contado

También:

$$\Sigma V_a = Saldo$$

CAMBIOS DE LETRA

Letra de Cambio

Es frecuente que una persona que debe una o varias letras de cambio, por razones diversas, desee cambiarlas por otra u otras letras de tal forma que no se perjudique él ni el acreedor.

Se cumple:

$$\sum Va_{\left(\substack{\text{Letras}\\ \text{reemplazadas}}\right)} = \sum Va_{\left(\substack{\text{Letras}\\ \text{reemplazantes}}\right)}$$

Ejemplo:

Va_1 Va_2 Va_3 <> $Va_{(I)}$ $Va_{(II)}$ (Letras de cambio)

$$\Rightarrow Va_1 + Va_2 + Va_3 = Va_{(I)} + Va_{(II)}$$

Vencimiento común

Consiste en reemplazar varias letras de cambio por una sola. Para que este reemplazo suceda se debe cumplir:

A. El valor nominal de la letra reemplazante es igual a la suma de los valores nominales, de las letras reemplazadas.

B. Todas las letras son descontadas comercialmente y a una misma tasa.

Ejemplo:

Vn_1, t_1 | Vn_2, t_2 | Vn_3, t_3 <> Vn_n, t_{vc} ← Vencimiento medio

Letra única

Se cumple:

$$Vn_n = Vn_1 + Vn_2 + Vn_3$$

Además:

$$t_{vc} = \frac{Vn_1t_1 + Vn_2t_2 + Vn_3t_3}{Vn_1 + Vn_2 + Vn_3}$$

EFECTUAR

1. El banquero descuenta dos letras: 30 y 50 días, respectivamente, ambas al 5%. Si los valores nominales están en la relación de 4 a 3, halla el valor actual de la segunda letra, si la suma de los descuentos es S/.13,50.
2. ¿Cuánto se recibirá por descontar una letra de S/.5400 el 10 de julio, al 5% cuatrimestral, sabiendo que dicho documento vence el 14 de octubre siguiente. Se sabe, además, que el banco cobra 1,5% de comisión y el 2% por el cambio de plazo?
3. Dentro de qué tiempo, se podrá pagar con S/.2500, colocados al 6% cuatrimestral, una letra de cambio que vence dentro de 2 años, descontable comercialmente al 15%. El valor nominal del documento es S/.3000.
4. Al comprar una refrigeradora a crédito se dio una cuota inicial de $450 y por el saldo se firmó una letra de $600 pagadera a 8 meses y que será descontada al 36% anual. Halla el precio al contado de la refrigeradora.
5. Halla el valor nominal de un documento, sabiendo que sus 2 descuentos (comercial y racional) suman S/.2880 y que están en la relación de 7 a 5, respectivamente.
6. En qué fecha ha sido aceptada una letra de S/.2340 al 18% y pagaderas a los 45 días; si se sabe que al venderla el 16 de mayo se recibe por ella S/.2313,09.
7. ¿Cuánto menos se hubiera recibido por una letra de S/.42 000 si se hubiera descontado comercialmente, si al descontar racionalmente se obtiene S/.40 000?
8. Calcula el valor nominal de una letra, que descontada por 4 meses al 5%, da una diferencia de S/.2 entre el descuento comercial y el descuento racional.
9. Halla la tasa de descuento anual a la que ha sido descontado un documento, sabiendo que al ser descontado 8 meses antes de su vencimiento, se recibe el 75% de valor nominal.

Problemas resueltos

A

1 Halla el descuento racional y el valor actual racional de una letra de S/.36 000, negociada al 5%, 4 años antes de su vencimiento.

Resolución:

Como: $Dr = \dfrac{Vn.r.t}{100 + r.t}$; t: años

$Dr = \dfrac{36\ 000 \,.\, 5 \,.\, 4}{100 + 5 \,.\, 4} = \dfrac{36\ 000 \,.\, 20}{120} = S/.6000$

$Var = Vn - Dr \Rightarrow Var = 36\ 000 - 6000$

$Var = S/.30\ 000$

$\therefore\ Dr = S/.6000 \ \wedge\ Var = S/.30\ 000$

2 Calcula el descuento comercial y el descuento racional de una letra cuyo valor nominal es S/.1400 a una tasa del 3% mensual durante 6 meses.

Resolución:

Sabemos:

$Dc = Vn \,.\, r\% \,.\, t$

$Dc = 1400 \,.\, 3\% \,.\, 6 \Rightarrow Dc = S/.252$

Sabemos:

$Dr = \dfrac{Vn \,.\, r\% \,.\, t}{1 + r\% \,.\, t}$

$\Rightarrow Dr = \dfrac{1400 \,.\, 3\% \,.\, 6}{1 + 3\% \,.\, 6} = \dfrac{252}{1{,}18}$

$\therefore\ Dr = S/.214$

3 El valor actual racional excede al valor actual comercial de una letra en S/.12. Calcula el valor nominal de dicha letra, si el producto de los descuentos es S/.2880.

Resolución:

Dato: $Va_r - Va_c = 12 \ \wedge\ Dc \,.\, Dr = 2880$

Sabemos:

$Dc - Dr = Va_r - Va_c = 12$

$Vn = \dfrac{Dc \,.\, Dr}{Dc - Dr} = \dfrac{2880}{12}$

$\therefore Vn = S/.240$

4 Se descuenta una letra de S/.420 y se obtiene S/.390. Si se descuenta racionalmente a la misma tasa, ¿cuánto se recibiría?

Resolución:

Datos: $Vn = S/.420$; $Va_c = S/.390$

Sabemos:

$Dc = Vn - Va_c = 420 - 390$

$Dc = 30$

$Vn \,.\, r\% \,.\, t = 30 \Rightarrow 420 \,.\, r\% \,.\, t = 30$

$\Rightarrow r\% \,.\, t = \dfrac{1}{14}$ ...(1)

Por propiedad:

$\dfrac{Va_c}{Va_r} = 1 - (r\% \,.\, t)^2$ ...(2)

Luego, reemplazando (1) en (2):

$\dfrac{390}{Va_r} = 1 - \left(\dfrac{1}{14}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{196}$

$\dfrac{390}{Va_r} = \dfrac{195}{196} \Rightarrow Va_r = S/.392$

5 Se tienen dos letras de S/.36 000 cada una. ¿Cuál será la diferencia de sus valores efectivos si hoy se descuenta una y mañana la otra, ambas al 50% anual?

Resolución:

Como: $Vn_1 = Vn_2 = S/.36\ 000$

Falta $\begin{cases} 1.^{a}: t \\ 2.^{a}: t - 1 \end{cases}$

Se tiene: $Dc_1 = \dfrac{36\ 000 \,.\, 50 \,.\, t}{36\ 000} = 50t$

$Dc_2 = \dfrac{36\ 000 \,.\, 50 \,.\, (t-1)}{36\ 000} = 50(t-1)$

Piden: $Va_2 - Va_1 = (Vn_2 - Dc_2) - (Vn_1 - Dc_1)$

$= Dc_1 - Dc_2 = 50t - 50(t - 1)$

$\therefore\ Va_2 - Va_1 = S/.50$

6 Cuatro letras de cambio de 600; 500; 400 y 300 soles vencen, respectivamente, dentro de 1; 3; 3 y 7 meses. Si se desea cancelar todas mediante un pago único, ¿dentro de cuántos meses debe efectuarse dicho pago?

Resolución:

Se tiene:

Valor nominal (S/.)	Tiempo de vencimiento (meses)
600	1
500	3
400	3
300	7

Entonces:

$t_{vc} = \dfrac{600 \,.\, 1 + 500 \,.\, 3 + 400 \,.\, 3 + 300 \,.\, 7}{600 + 500 + 400 + 300}$

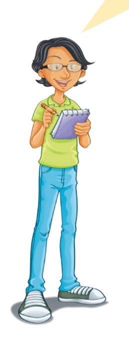
$t_{vc} = \dfrac{5400}{1800} \Rightarrow t_{vc} = 3$ meses

DEFINICIÓN

La estadística es la ciencia cuyo objetivo es reunir, organizar, presentar, analizar e interpretar datos concernientes a individuos, grupos, serie de hechos, etc., con el fin de obtener conclusiones y tomar decisiones sobre determinados eventos en estudio.

Observación

Las variables pueden ser:
- Altura (en metros): 1,82; 1,52; 1,49; 1,70; ...
- Estado civil: Casado; soltero; divorciado
- Peso (en kg): 20; 40; 60; 80; ...
- Sexo: Masculino; femenino



CONCEPTOS BÁSICOS

Variable	Muestra	Población
Es una característica observable que varía entre los individuos de una población. Ejemplo: • Desempeño en clase, puntualidad, etc.	Es un subconjunto de la población sobre la que realmente hacemos las observaciones. Ejemplo: • Un grupo de profesores de un colegio.	Es el conjunto sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones. Ejemplo: • Profesores de un colegio.

ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

1. Recopilación de datos

Los métodos de recopilación de datos son muy diversos y dependen de las posibilidades de acceso con los elementos a investigar, del tamaño de la muestra, etc.

Ejemplo:

Se tienen los ingresos quincenales de 20 personas tomadas al azar de un pequeño poblado.

470	500	490	300	80
250	270	300	600	120
250	450	450	460	380
370	380	450	0	400

2. Organización de datos

Después de la recopilación de datos se procede a su organización clasificación, de modo que facilite su representación en tablas, gráficos, etc.

Ejemplo:

De los datos anteriores, los ordenaremos de menor a mayor.

0	80	120	250	250
270	300	300	370	380
380	400	450	450	450
460	470	490	500	600

Nota

Los métodos más utilizados en la recopilación de datos son los censos y las encuestas.

3. Presentación de datos

Luego de haber recopilado y ordenado los datos, es necesario presentarlos en forma clara y precisa. Dicha representación se hace en tablas o gráficos.

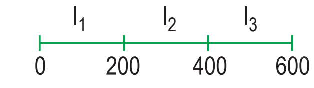
ELEMENTOS DE UNA TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

- **Alcance (A)**
  Intervalo cerrado que considera como límites al menor y mayor de los datos.
  En el ejemplo:

  0 ——— 600 $A = [0; 600]$

- **Rango (R)**
  Es la amplitud del alcance. Se calcula como la diferencia del mayor y el menor de los datos.
  $R = 600 - 0$
  $R = 600$

- **Intervalo de clase (I_i)**
  Es una partición del alcance, que se obtiene de un conjunto adecuado del alcance. Del ejemplo:



  $I_1 = [0; 200\rangle$
  $I_2 = [200; 400\rangle$
  $I_3 = [400; 600]$

- **Límites de un intervalo de clase**
  L_i = Límite inferior
  L_s = Límite superior

  En el ejemplo:

  $I_1 = [0 ; 200\rangle$
  $L_i = 0$
  $L_s = 200$

- **Ancho de clase (w_i)**
  Es el tamaño de un intervalo determinado.
  En el ejemplo:
  $I_1 = [0; 200\rangle \Rightarrow w_1 = 200 - 0$
  $w_1 = 200$

- **Marca de clase (x_i)**
  Es la media de los límites de un intervalo.
  Ejemplo:
  $I_1 = [0; 200\rangle$
  $x_1 = \dfrac{0 + 200}{2} = 100$

- **Número de intervalos (k)**
  Los datos se pueden clasificar en cierta cantidad de intervalos de clase. La regla de Sturges permite obtener el número de intervalos convenientes (k), de igual ancho de clase en los que se deben clasificar, dependiendo del número de datos (N).

$$k = 1 + 3{,}3\log(N)$$

En el ejemplo:
$N = 20 \Rightarrow k = 1 + 3{,}3\log(20) = 5{,}294...$
Considerando que k aproximado puede ser 4; 5 o 6, elegiremos k = 5.

Observación

El número de intervalos puede ser elegido a criterio y el ancho de clase podría variar en la tabla, si esto ayuda al análisis estadístico.

TABLA DE DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

I_i	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[0; 120⟩	60	2	2	0,10	0,10
[120; 240⟩	180	1	3	0,05	0,15
[240; 360⟩	300	5	8	0,25	0,40
[360; 480⟩	420	9	17	0,45	0,85
[480; 600]	540	3	20	0,15	1

Donde:
f_i: frecuencia absoluta de la clase i, indica la cantidad de datos que hay en un intervalo de clase determinado.
F_i: frecuencia absoluta acumulada de la clase i, indica la cantidad de datos que hay en un intervalo de clase y en todos los anteriores a este intervalo.
h_i: frecuencia relativa, se calcula como: f_i/N.
H_i: frecuencia relativa acumulada, se calcula como: F_i/N.

Nota

- $f_1 + f_2 + ... + f_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = N$
- $f_1 = F_1 \quad \wedge \quad F_k = N$
- $F_i = f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_i$
- $h_i = \dfrac{f_i}{N}$
- $H_i = \dfrac{F_i}{N}$
- $H_1 = h_1 \quad \wedge \quad H_k = 1$

GRÁFICOS

Histograma

Son diagramas de barras o rectángulos cuyas bases representan los intervalos de clase y las alturas las frecuencias absolutas o relativas.
Del cuadro anterior:

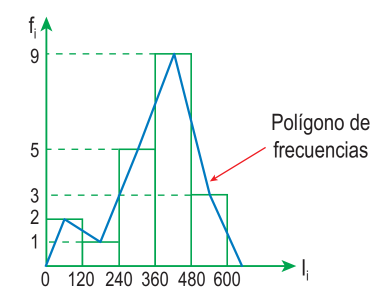
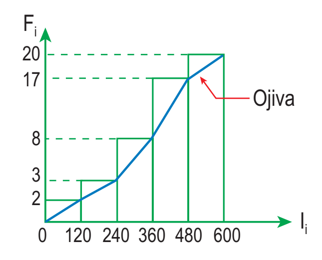
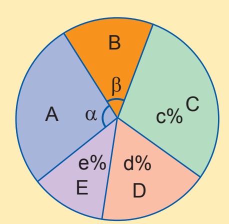


Diagrama escalonado

Son diagramas similares al histograma con la diferencia de que las alturas son frecuencias absolutas acumuladas o relativas acumuladas.
Del cuadro anterior:





Atención

Diagrama circular
Se emplea principalmente con fines comparativos, a este tipo de representación gráfica también se le conoce como gráfico de sectores o gráfico de pastel.

Al total le corresponde 360°
Total → 360°
A → α° (α en grado sexagesimal)

Al total le corresponde 100%
Total → 100%
C → c%

MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Media aritmética ($\overline{X}$)

A) Para datos no clasificados

Sean los datos:

$d_1; d_2; d_3; ...; d_n$

$$\overline{X} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + ... + d_n}{N} = \frac{\sum_{i=n}^{n} d_i}{N}$$

Ejemplo:

Halla la media aritmética de los datos:

7; 15; 16; 100; 25; 35; 40

$$\overline{X} = \frac{7 + 15 + 16 + 100 + 25 + 35 + 40}{7}$$

$$\overline{X} = \frac{238}{7} \Rightarrow \overline{X} = 34$$

B) Para datos clasificados

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} x_i h_i$$

Ejemplo:

De la tabla de distribución de frecuencias:

$$\overline{X} = \frac{120 + 180 + 1500 + 3780 + 1620}{20}$$

$$\overline{X} = \frac{7200}{20} \Rightarrow \overline{X} = 360$$

Observación

- La clase mediana es aquella cuya frecuencia absoluta acumulada sea igual o mayor a la mitad de los datos por primera vez.
- La clase modal se ubica hallando el intervalo de clase con la mayor frecuencia absoluta.

Mediana (Me)

A) Para datos no clasificados

Se procede a ordenar los datos y elegimos al que se encuentre en el centro, si el número de datos es par, la mediana es la semisuma de los dos datos centrales.

Ejemplo:

7; 15; 16; 25; 35; 40; 100

El término central es la mediana

B) Para datos clasificados

$$Me = L_m + w_m \left[\frac{N/2 - F_{m-1}}{f_m}\right]$$

Donde:

L_m: límite inferior de la clase mediana.

w_m: amplitud del intervalo de clase.

F_{m-1}: frecuencia acumulada anterior a la clase mediana.

f_m: frecuencia absoluta de la clase mediana.

Ejemplo:

De la tabla:

$$Me = 360 + 120\left[\frac{10 - 8}{9}\right]$$

$Me = 386,7$

Moda (Mo)

A) Para datos no clasificados

La moda es el dato que más se repite en el conjunto de datos.

Ejemplo:

En los datos: 20; 30; 30, 30, 40, 40, 50

30 se repite más, por lo tanto es la moda.

B) Para datos clasificados

$$Mo = L_o + w_o\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

Donde:

L_o: límite inferior de la clase modal.

w_o: ancho de la clase modal.

d_1: $f_o - f_{(o-1)}$

d_2: $f_o - f_{(o+1)}$

f_o: frecuencia absoluta de la clase modal.

Ejemplo:

De la tabla:

$$Mo = 360 + 120\left[\frac{4}{4 + 6}\right] = 408$$

Cuartil (Q_1)

Al calcular la mediana, lo que hallábamos es el dato que se encuentra en la mitad. El cuartil halla el dato que se encuentra en la cuarta parte del conjunto.

A) Para datos no tabulados

se ordenan los datos y se escoge el dato de la posición N/4.

B) Para datos tabulados

Consecuente de la fórmula de la mediana:

$$Q_1 = L_Q + W_Q\left[\frac{N/4 - F_{Q-1}}{f_Q}\right]$$

L_Q, W_Q, f_Q pertenecen al intervalo cuartil y F_{Q-1} a un intervalo anterior.

Centil o percentil (C_r)

Con el centil calculamos el dato que se encuentra en la centésima parte del conjunto. Si nos piden el centil 17 (C_{17}) nos están pidiendo el dato que se encuentra en la $\frac{17}{100}$ parte del conjunto.

Cálculo del centil

A) **Para datos no tabulados**

Se ordenan los datos y se escoge el dato de la posición rN/100.

B) **Para datos tabulados**

$$C_r = L_C + W_C\left[\frac{{}^{rN}\!/_{100} - F_{C-1}}{f_C}\right]$$

L_C, W_C, f_C pertenecen al intervalo centil y F_{C-1} a un intervalo anterior.

Nota

Se le llama Decil (D_1), al dato que divide el conjunto en la décima parte.

Atención

Nos pueden pedir:
C_1; C_2; C_3 ... C_{99}.

Sea C_m lo que nos piden, la fórmula será:

$$C_m = L_C + W_C\left[\frac{\frac{N.m}{100} - F_{c-1}}{f_c}\right]$$

Esto es extensivo a los cuartiles y deciles.

MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Varianza y desviación estándar

Estas medidas sirven para calcular la dispersión de los datos, es decir, que tan alejados se encuentran los datos de la media.

Se calculan:

A) Para datos no tabulados

Varianza $$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \overline{X})^2}{N}$$

Desviación estándar $$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(d_i - \overline{X})^2}{N}}$$

B) Para datos tabulados

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 f_i}{N}$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{X})^2 f_i}{N}}$$

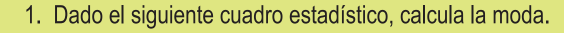
Coeficiente de variación

Cuando queremos comparar las dispersiones de dos o más conjuntos de datos, no es correcto comparar directamente las varianzas o desviaciones estándar cuando las medias aritméticas son distintas, en este caso se comparan los coeficientes de variación (CV).

$$CV = \frac{S}{\overline{X}}.100$$

El conjunto que tenga mayor CV tendrá mayor dispersión y viceversa.

EFECTUAR



1. Dado el siguiente cuadro estadístico, calcula la moda.

X_i	f_i	F_i
6		4
8	6	
10		15
13		20
15	8	

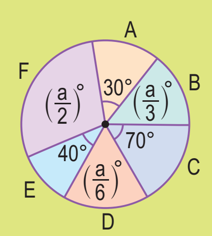
2. Dado el siguiente cuadro, determina la moda.

I_i	f_i
[0; 40⟩	6
[40; 80⟩	5
[80; 120⟩	4
[120; 160⟩	9
[160; 200]	6

3. En el siguiente cuadro se muestra la distribución de edades de un cierto número de personas.
Calcula: x + y + z.

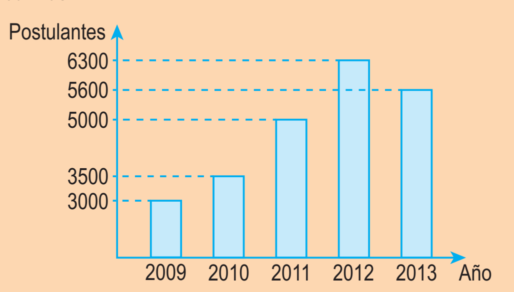
I_i	f_i	h_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	80			
[30; 40⟩	40	0,25		z
[40; 50⟩		0,15	y	
[50; 60⟩	x			

4. Dado el siguiente pictograma, en D hay 7 dólares. ¿Cuántos dólares hay en A?



Problemas resueltos

1 El diagrama muestra la cantidad de postulantes a la universidad X, los últimos 5 años. Calcula el promedio anual de postulantes en dicho periodo y la mayor variación porcentual entre dos años consecutivos.



Resolución:

El promedio anual lo calcularemos dividiendo el número total de postulantes entre el número de años, esto es:

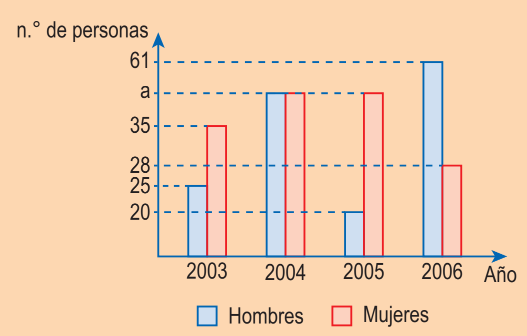
$$\frac{6300+5600+5000+3500+3000}{5} = 4680$$

La mayor diferencia porcentual la hallaremos ayudándonos con el gráfico. Buscamos la barra que su año consecutivo haya aumentado más. No es difícil darse cuenta que es la barra del año 2010.

La mayor variación es: $5000 - 3500 = 1500$

$\therefore$ La variación en porcentual es: $\frac{1500}{3500} = 42{,}8\%$.

2 El diagrama muestra la distribución del personal de una empresa por género. Si el promedio anual de personal femenino es 35,75; calcula qué tanto por ciento es el personal masculino en el año 2005.



Resolución:

El promedio anual de personal femenino es la suma total de mujeres entre el número de años, esto es:

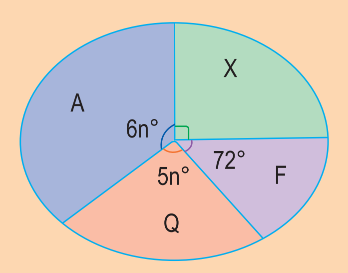
$$\frac{2a+35+28}{4} = 35{,}75$$

$2a + 35 + 28 = 143 \Rightarrow a = 40$

Para calcular el porcentaje de personal masculino en el año 2005, hacemos:

$$\frac{20}{20+40} \times 100\% = \frac{20}{60} \times 100\% = 33{,}\hat{3}\%$$

3 El siguiente gráfico muestra la preferencia de un grupo de N alumnos sobre los cursos de Aritmética (A), Álgebra (X), Física (F) y Química (Q). Determina cuántos prefieren Aritmética si los que prefieren Álgebra son 100 personas.



Resolución:

$6n° + 5n° + 72° + 90° = 360°$

$11n° + 162° = 360°$

$11n° = 198° \Rightarrow n = 18$

Prefieren Aritmética: a

$a \longrightarrow 6n° = 108°$

$100 \longrightarrow 90°$

$$\Rightarrow a = \frac{100 \,.\, 108°}{90°} = 120$$

4 Dado el siguiente cuadro, determina la mediana.

I_i	f_i	F_i
[20; 30⟩	2	2
[30; 40⟩	4	6
[40; 50⟩	5	11
[50; 60⟩	6	17
[60; 70⟩	3	20

Resolución:

Determinamos primero el intervalo de la clase mediana.

Intervalo de la clase mediana →

I_i	f_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	2	2	0,10
[30; 40⟩	4	6	0,30
[40; 50⟩	5	11	0,55
[50; 60⟩	6	17	0,85
[60; 70⟩	3	20	1,00
	n = 20		

$$Me = L_m + w_m\left[\frac{\frac{n}{2} - F_{(m-1)}}{f_m}\right]$$

$$Me = 40 + 10\left[\frac{\frac{20}{2} - 6}{5}\right]$$

$Me = 40 + 8 \Rightarrow Me = 48$

ANÁLISIS COMBINATORIO

A

DEFINICIÓN

El análisis combinatorio es la parte de la Matemática que estudia las diferentes maneras en que se pueden formar agrupaciones entre elementos de uno o más conjuntos y cómo contar ordenadamente su número.

TÉCNICAS DE CONTEO

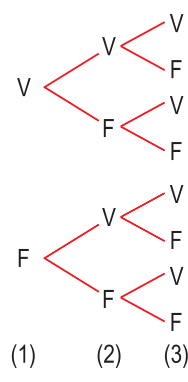
El análisis combinatorio aporta unas técnicas llamadas de conteo, que son las operaciones que permiten determinar la cantidad de formas en que se pueden disponer los elementos de un conjunto, bajo condiciones particulares de ordenamiento.

> **Nota**
> Solo el diagrama de árbol nos permite **visualizar** todas las opciones, pero cuando se tienen muchas posibilidades es muy complicada su realización y debemos recurrir a las otras técnicas de conteo.

Diagrama de árbol

Es un procedimiento gráfico para construir y contar todas las posibles formas de combinar elementos de uno o más conjuntos.

Ejemplo:
Un examen tiene 3 preguntas y la respuesta de cada una de ellas puede ser falsa o verdadera. Representa todas las posibles respuestas usando el diagrama de árbol.



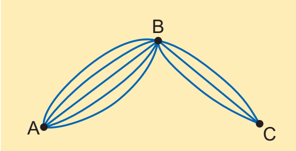
Cada columna representa las posibles respuestas, en la primera pregunta hay 2 posibilidades, en la segunda hay 4 posibilidades, etc.

Si seguimos los caminos formados se puede apreciar que existen 8 formas diferentes para contestar dicho examen.

E = {(V, V, V); (V, V, F); (V, F, V); (V, F, F);
(F, V, V) (F, V, F); (F, F, V); (F, F, F)}

Ahora desarrollaremos técnicas de conteo en las que no apreciamos gráficamente todas las posibilidades.

> **Observación**
> Se tiene el siguiente sistema de caminos, calcularemos el número de formas de ir de A a C.



> De A a B hay 5 posibles rutas, de B a C tenemos 3 posibilidades.
> En total hay $5 \times 3 = 15$ formas de ir de A a C.

Principio de multiplicación

Si un evento puede ocurrir de m maneras distintas y un segundo evento puede ocurrir independientemente del primero de n maneras distintas, entonces el número total de formas diferentes en que pueden ocurrir simultáneamente es igual a $m \times n$.

Ejemplo:
Resolvamos el ejemplo anterior sin usar el diagrama de árbol y usando el principio de multiplicación:

La primera pregunta tiene 2 respuestas posibles y por cada una de estas habrá 2 respuestas posibles para la segunda pregunta, es decir: $2 \times 2 = 4$, por cada una de estas posibilidades, la tercera pregunta tendrá:
$2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = 8$ respuestas posibles.

Hemos realizado el cálculo directamente sin necesidad de conocer cuáles son los ordenamientos posibles.

Principio de adición

Si una situación puede ocurrir de m maneras distintas y una segunda situación excluyente de la primera puede ocurrir de k maneras distintas, entonces existen $m + k$ maneras en las que puede ocurrir la primera o la segunda situación.

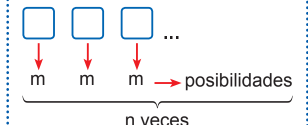
Ejemplo:
Para viajar de Lima a Cusco se puede optar por tres compañías aéreas o por 5 empresas de ómnibus. ¿Cuántas maneras diferentes existen para realizar el viaje?

En este caso las situaciones no se pueden realizar de manera simultánea, por lo que sería erróneo usar la multiplicación, estas situaciones son excluyentes entre sí, es decir, se realiza una o la otra, se viaja en avión o en ómnibus entonces se puede ir de Lima a Cusco de $3 + 5 = 8$ maneras posibles.

> **Recuerda**
> - $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 2 . 1$
>
>   Ejemplo:
> $4! = 4 . 3 . 2 . 1 = 24$
> - $n! = n(n-1) \ldots (n-k+1)(n-k)!$
>
>   Ejemplo:
> $8! = 8 . 7!$
> $8! = 8 . 7 . 6 . 5!$
> - Además:
> $0! = 1$
> $1! = 1$

Nota

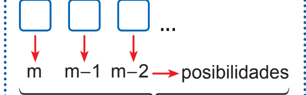
Una forma práctica de entender las variaciones con repetición es el análisis gráfico:



En la primera posición tenemos m posibilidades, las mismas m posibilidades se dan en la 2.ª, 3.ª ... posición. Por el principio de multiplicación tenemos en total m^n posibilidades.

Nota

De forma recíproca a la anterior podemos analizar las variaciones sin repetición:



Por el principio de multiplicación:

$m \times (m-1) \times (m-2) \times ... \times (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$

Observación

Permutaciones con repetición

Es un caso particular de las permutaciones, donde el primer elemento se repite "a" veces, el segundo "b" veces, el tercero "c" veces, y así sucesivamente.

Se representa:

$$P^n_{a;\,b;\,c;\,...} = \frac{n!}{a! \times b! \times c! \times ...}$$

Atención

En una combinación se calcula el número de formas en que puedes escoger un subconjunto. Si permutamos los elementos de este subconjunto, tendremos un subconjunto ordenado, es decir, una variación. Esta relación se expresa:

$$C^m_n \times P_n = V^m_n$$

VARIACIONES

Variaciones con repetición

Son todas las ordenaciones de n elementos con repetición de un conjunto de m objetos, $n \leq m$, se denota:

$$VR^m_n = m^n$$

Ejemplo:

¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con los dígitos 2; 3 y 6, si se permiten repeticiones?

Resolución:

Los números son: 22; 23; 26; 32; 33; 36; 62; 63; 66. Hay 9 números de dos cifras.

Utilizando la fórmula: $VR^3_2 = 3^2 = 9$ números

Variaciones sin repetición

Es un **ordenamiento** específico de n elementos de un conjunto C de m elementos. Facilita el recuento de las ordenaciones diferentes que pueden hacerse con los elementos del conjunto. En una variación el orden en que se disponen los elementos del conjunto es importante. La variación de un conjunto de m elementos, tomados de n en n se denota:

$$V^m_n = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Ejemplo:

Se colocan dieciocho tarjetas, numeradas de 1 a 18, en una bolsa para rifar tres premios. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los premios?

A un premio no le puede corresponder más de un número, es decir, queremos todos los ordenamientos posibles, sin elementos repetidos, de tamaño tres de un total de 18:

$$V^{18}_3 = \frac{18!}{15!} = 18 \times 17 \times 16 = 4896$$

También pudimos directamente decir: al primer premio le corresponde 18 posibilidades. Seleccionado este, al segundo le queda 17 posibilidades y al tercero 16. En total hay $18 \times 17 \times 16 = 4896$ maneras.

PERMUTACIONES

Son un caso particular de las variaciones, que corresponden a la situación $m = n$.

En este caso $V^m_m = m!$. Observamos que ahora los ordenamientos contendrán a todos los elementos del conjunto analizado, sin repetición, dispuestos en todos los órdenes posibles.

Dado un conjunto $C = \{C_1, C_2, C_3\}$, esto es $m = 3$. Las permutaciones serían:

$(C_1; C_2; C_3)$; $(C_1; C_3; C_2)$, $(C_2; C_1; C_3)$, $(C_2; C_3; C_1)$, $(C_3; C_1; C_2)$, $(C_3; C_2; C_1)$

Claramente $V^3_3 = 6$, también se emplea: $V^m_m = P_m$.

Ejemplo:

¿De cuántas maneras podemos colocar 4 bolas en fila?

La primera puede ser cualquiera de los cuatro, la segunda cualquiera de los tres restantes, etc.

Entonces la respuesta es: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$

COMBINACIONES

Una combinación es un subconjunto o una disposición de todos los elementos de un conjunto, **sin tener en cuenta el orden de ellos**, el número de combinaciones o subconjuntos no ordenados, cada uno formado por n elementos que pueden obtenerse de un conjunto de m elementos. Se calcula:

$$C^m_n = \frac{m!}{(m-n)! \times n!}$$

Ejemplo:

De un grupo de treinta estudiantes, queremos escoger dos para que participen en una competencia.

¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

En este caso no nos importa el orden en el que sean escogidos, es decir, buscamos de cuántas formas podemos escoger dos estudiantes de un total de treinta, entonces:

$$C^{30}_2 = \frac{30!}{28! \times 2!} = \frac{30 \times 29}{2} = 435$$

Problemas resueltos

1 María tiene 8 blusas, 4 faldas y 6 pares de zapatos. Utilizando una de cada tipo de las prendas mencionadas, ¿de cuántas maneras diferentes se puede vestir María?

Resolución:

Blusas	Faldas	Pares de zapatos
8	4	6
diferentes	diferentes	diferentes

Entonces:

$\therefore\ 8 \times 4 \times 6 = 192$ maneras diferentes.

2 ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar 4 personas, en una banca de 4 asientos?

Resolución:

n: 4 personas
k: 4

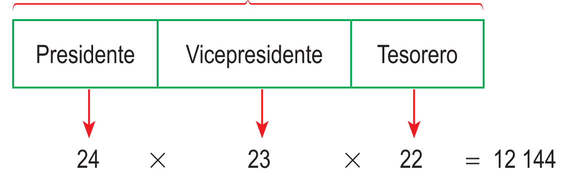
$$\Rightarrow V_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$V_4^4 = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4!}{0!} = \frac{4!}{1}$$

$\therefore\ V_4^4 = 4! = 24$ maneras diferentes.

3 En un club participan 24 socios para la elección de un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas maneras diferentes se puede llevar a cabo dicha elección?

Resolución:



Otra forma:

$$V_3^{24} = \frac{24!}{(24-3)!} = \frac{24!}{21!} = \frac{24\,.\,23\,.\,22\,.\,21!}{21!}$$

$\therefore\ V_3^{24} = 12\,144$

4 ¿Cuántos triángulos diferentes se pueden forman uniendo solo los 5 vértices de un pentágono?

Resolución:

No importa la manera como se formen los triángulos; además, para formar cualquier triángulo se necesitan 3 puntos. Se trata de una combinación.

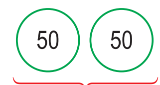
$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!.2!}$$

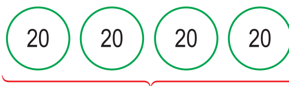
$$C_3^5 = \frac{5.4.3!}{3!.2!} = 10$$

Por lo tanto, se pueden formar 10 triángulos.

5 ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar linealmente 6 monedas, de las cuales dos son de 50 céntimos y 4 de 20 céntimos?

Resolución:





Entonces, es una permutación con elementos repetidos.

$$P_{2,\,4}^{6} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15 \text{ maneras distintas.}$$

6 Del personal médico de un hospital se eligen 5 doctores y 3 enfermeras, para que de ellos se escojan 4 miembros donde haya no menos de dos enfermeras. ¿De cuántas maneras puede efectuarse la elección?

Resolución:

Tomemos el caso de que el grupo está formado por 2 doctores y 2 enfermeras, entonces el número de maneras para este caso es:

$$C_2^5 \times C_2^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 30$$

Y si el grupo está formado por 1 doctor y 3 enfermeras, entonces el número de maneras para este caso es:

$$C_1^5 \times C_3^3 = 5 \times 1 = 5$$

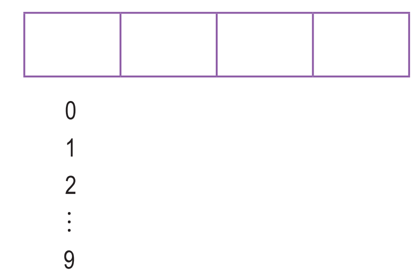
Ahora ambas posibilidades se pueden dar, pero no a la vez, entonces el número de maneras de efectuarse la elección será la suma de ambas posibilidades:

$\therefore$ n.° de maneras $= 30 + 5 = 35$.

7 Si la clave de una tarjeta de ahorros está formada por 4 dígitos, ¿cuántas claves diferentes se pueden generar?

Resolución:

Graficamos un modelo:



Cada posición de la clave tiene 10 posibilidades, el total de claves diferentes será $10^4 = 10\,000$.

PROBABILIDAD

Atención

1. Si el evento A es un subconjunto de un espacio muestral S, el complemento de A contiene los elementos de S que no son miembros de A. Lo denotamos por: A'.

   Y se cumple que:

   $P(A') = 1 - P(A)$

2. La intersección de dos eventos A y B, denotada mediante el símbolo $A \cap B$, es el evento que contiene a todos los elementos comunes a A y a B.
3. Dos eventos A y B son mutuamente excluyentes o disjuntos si $A \cap B = \varnothing$; es decir, si A y B no tienen elementos en común.
4. La unión de dos eventos A y B, que se denota mediante el símbolo $A \cup B$, es el evento que contiene todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos.

La idea de probabilidad es tan antigua como el mismo hombre. Ya en la época prehistórica el ser humano pensaba y transmitía ideas como "la probabilidad de que llueva mañana".

Sin embargo, es recién en 1654 que comienza a desarrollarse el cálculo de probabilidades, cuando Fermat y Pascal intercambian correspondencia para aplicar métodos matemáticos en la resolución de problemas de juegos de azar con cartas y dados. Hoy en día su desarrollo es tal que se aplica en la genética, física, tecnología, etc.

ESPACIO MUESTRAL

El conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **espacio muestral** y lo representaremos con el símbolo S.

Cada resultado posible en un espacio muestral se llama elemento, miembro o punto muestral.

Ejemplo:
Si lanzamos una moneda y queremos observar el lado que queda arriba, el espacio muestral sería:

$$S_1 = \{cara, sello\}$$

Si lanzamos la moneda dos veces, nuestro espacio muestral sería:

$$S_2 = \{CC, CS, SC, SS\}$$

EVENTOS

En un experimento dado podríamos estar interesados no en el espacio muestral, sino solo en una parte de este, es decir, solo en algunos elementos del espacio muestral; y estos elementos constituyen un evento. Por lo tanto, un evento es un subconjunto de un espacio muestral.

Ejemplo:
Del ejemplo anterior, si lo que quisiéramos estudiar del experimento es la ocurrencia de dos caras, nuestro evento E sería:

$$E = \{CC\} \text{ un subconjunto de } S_2.$$

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

La probabilidad de ocurrencia de un evento que resulta de un experimento aleatorio cualquiera se evalúa por medio de un conjunto de números reales denominados pesos o probabilidades que van de 0 a 1. La suma de todos los pesos debe ser 1. La probabilidad de un evento A se simboliza por P(A).

La probabilidad de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por tanto:

$$0 \le P(A) \le 1, \; P(\varnothing) = 0 \; y \; P(S) = 1$$

Observación

Si un experimento puede tener como resultado cualquiera de N diferentes resultados igualmente probables, y si exactamente n de estos resultados corresponden al evento A, entonces la probabilidad del evento A es:

$$P(A) = \frac{n}{N}$$

Ejemplo:
Se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad que el número obtenido sea mayor a 4?

El espacio muestral de este experimento es: $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Asumimos que cada uno de los resultados tiene el mismo peso, por tanto asignamos una probabilidad w a cada uno de los elementos. Entonces 6w = 1, o w = 1/6. Si A representa el evento de que el número detenido sea mayor a 4, entonces:

$$A = \{5; 6\} \; y \; P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Reglas de adición

Son reglas que nos ayudan a simplificar el cálculo de probabilidades, a partir del conocimiento de las probabilidades de otros eventos. Estas se aplican a la unión de eventos.

1. Si A y B son cualesquiera dos eventos, entonces:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
2. Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
3. Si A y A' son eventos complementarios, entonces:
$$P(A) + P(A') = 1$$

Probabilidad condicional

La probabilidad de que un evento B ocurra cuando se sabe que ya ocurrió algún evento A se llama probabilidad condicional y se denota por P(B/A). El símbolo P(B/A) por lo general se lee "la probabilidad de que ocurra B dado que ocurrió A" o simplemente "la probabilidad de B, dado A".

La probabilidad condicional B, dado A, se denota con P(B/A), se define como:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ si } P(A) > 0$$

Ejemplo:

El evento B consiste en obtener un número cuadrado perfecto cuando lanzamos un dado. Siendo S = {1; 2; 3; 4; 5; 6}, entonces P(B) = 1/3. Supongamos ahora que se sabe que el lanzamiento del dado dio un número mayor a 3. Tenemos un nuevo espacio muestral A = {4; 5; 6} que es un subconjunto de S. Dando nuevos pesos a los elementos de A, cada elemento tendrá de peso 1/3, este evento B/A = {4} y P(B/A) = 1/3. También podemos escribir:

$$P(B/A) = \frac{1}{3} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donde $P(A \cap B)$ y P(A) se encuentran a partir del espacio muestral original S.

Observación

Cuando dados dos eventos A y B, la ocurrencia de B no tiene impacto en las probabilidades de ocurrencia de A. Aquí la ocurrencia de A es independiente de la ocurrencia de B.
Dos eventos A y B son independientes sí y solo sí:

P(B/A) = P(B) y P(A/B) = P(A)

De otra forma A y B son dependientes.

Reglas multiplicativas

1. Si en un experimento pueden ocurrir los eventos A y B, entonces:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

2. Dos eventos A y B son independientes sí y solo sí:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Ejemplo:

A y B juegan 12 veces el ajedrez, de los cuales A gana 6 veces, B gana 4 y 2 terminan empates. Acuerdan jugar un torneo consistente en 3 partidas. Halla la probabilidad de que:

a) A gane las tres partidas.
b) Dos partidas terminen empates.

Resolución:

Denote por:

A_1, A_2 y A_3 los eventos de que A gane la primera, segunda y tercera partida, respectivamente.

$$P[\text{A gane una partida}] = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}; \; P[\text{B gane una partida}] = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

T_1, T_2 y T_3 los eventos de que A y B empaten en la primera, segunda y tercera partida, respectivamente.

$$P(T_1) = P(T_2) = P(T_3) = P[\text{una partida sea empate}] = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

a) $P[\text{A gane las tres partidas}] = P[A_1A_2A_3] = P[A_1]P[A_2]P[A_3] = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$. Se asume que el resultado de cada juego es independiente del resultado de los demás. Esta suposición es aceptable solo si los jugadores no pueden dejarse influenciar psicológicamente por las otras partidas jugadas.

b) P[dos partidas sean empates]

$= P[1.^a \text{ y } 2.^a \text{ o } 1.^a \text{ y } 3.^a \text{ o } 2.^a \text{ y } 3.^a \text{ sean empates}]$

$= P[T_1T_2T_3'] + P[T_1T_2'T_3] + P[T_1'T_2T_3]$

$= P[T_1]P[T_2]P[T_3'] + P[T_1]P[T_2']P[T_3] + P[T_1']P[T_2]P[T_3]$

$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

Nota

Si A y B son dos eventos independientes:
A' y B' también son independientes.
A' y B también son independientes.
A y B' también son independientes.

Problemas resueltos

1 En una urna hay 5 esferas rojas, 4 esferas blancas y n esferas negras. Si al extraer 2 esferas la probabilidad de que estas sea rojas es 5/33, calcula n.

Resolución:

La probabilidad de obtener una esfera roja es: $\frac{5}{(9+n)}$,

hecho esto la probabilidad de obtener otra roja es: $\frac{4}{(8+n)}$

La probabilidad de que ambas sean rojas es:

$$\frac{5}{(9+n)} \times \frac{4}{(8+n)} = \frac{5}{33}$$

$$4(33) = (8+n)(9+n)$$

$$11 \times 12 = (8+n)(9+n)$$

$$\therefore\ n = 3$$

2 Si se extraen 4 cartas de un casino, ¿cuál es la probabilidad de que estas cartas pertenezcan al mismo palo?

Resolución:

De un palo se pueden elegir cuatro cartas de C_4^{13} formas. El espacio muestral consta de C_4^{52}, que es elegir cuatro cartas de toda la baraja.

La probabilidad es: $\frac{C_4^{13}}{C_4^{52}} = \frac{715}{270\,725} = 0{,}00264$

3 En una urna se tienen 5 fichas verdes y 4 rojas. Si se extraen 3 al azar, calcula la probabilidad de que sean del mismo color.

Resolución:

El espacio muestral será $C_3^9 = \frac{9!}{6! \times 3!} = 84$.

El evento que sean del mismo color se puede dar de $C_3^5 + C_3^4$ formas.

Entonces: $P = \frac{C_3^5 + C_3^4}{C_3^9} = \frac{10+4}{84} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$

4 Se mezclan 5 monedas falsas con 9 auténticas. Si se selecciona al azar 2 monedas, ¿cuál es la probabilidad de que las 2 sean falsas?

Resolución

Dos monedas cualquiera se pueden tomar de C_2^{14} formas, esto es el espacio muestral. Que las dos monedas sean falsas se puede dar C_2^5 formas posibles.

Entonces:

$$P = \frac{C_2^5}{C_2^{14}} = \frac{\frac{5!}{3! \times 2!}}{\frac{14!}{2! \times 12!}} = \frac{10}{91}$$

5 En cierta ciudad, las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. Calcula la probabilidad de que una elegida al azar comience con A y termine en 89.

Resolución:

El espacio muestra tiene $V_2^5 \times V_5^{10}$ elementos y el evento pedido tiene $V_1^4 \times V_3^8$ elementos. Entonces:

$$P = \frac{V_1^4 \times V_3^8}{V_2^5 \times V_5^{10}} = \frac{\frac{4!}{3!} \times \frac{8!}{5!}}{\frac{5!}{3!} \times \frac{10!}{5!}} = \frac{1}{450}$$

6 En una cartuchera se tienen 3 lapiceros de color azul, 2 de color rojo y uno de color negro. Si se extraen 2 lapiceros al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean de diferente color?

Resolución:

En este problema usaremos el concepto de complemento de eventos, ya que el cálculo es más sencillo.

Calculemos la probabilidad de que sean del mismo color.

El espacio muestral tiene C_2^6 elementos y el evento A de que sean del mismo color tiene $C_2^3 + C_2^2 = 4$ elementos.

Entonces:

$P(A) = \frac{4}{C_2^6} = \frac{4}{15}$, como lo que queremos es el complemento $P(A')$ y $P(A) + P(A') = 1$, entonces $P(A') = 11/15$.

7 A una comida asisten 28 hombres y 32 mujeres. Han elegido carne 16 hombres y 20 mujeres; tomando pescado el resto. Si elegimos una persona al azar. Calcula la probabilidad de que sea hombre y haya tomado pescado.

Resolución:

Sea: A = ser hombre　　C = comer carne

B = ser mujer　　D = comer pescado

$$P(A) = \frac{28}{60} = \frac{7}{15}$$

De los datos hallamos que 12 hombres comieron pescado y 12 mujeres comieron pescado.

Luego: $P(D) = \frac{12+12}{60} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

Nos piden la probabilidad de que la persona elegida sea hombre y haya comido pescado.

Es decir: $P(A \cap D) = P(A) \,.\, P(D/A)$

$$P(A \cap D) = \frac{7}{15} \cdot \frac{12}{28} = \frac{1}{5}$$